تمرین۱:

فرض کنید $\vec{A}$ برداری باشد از مبدأ به نقطهٔ P که در فضا ثابت است. فرض کنید $\vec{r}$ برداری باشد از مبدأ به نقطهٔ متغیر $Q(x_1, x_2, x_3)$.
نشان دهید که $\vec{A} \cdot \vec{r} = A^2$ معادلهٔ صفحه‌ای است عمود بر $\vec{A}$ که از نقطهٔ P می‌گذرد.

تمرین۲:

ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

پیدا کنید: الف) $|\mathbf{AB}|$ و ب) $\mathbf{AB} - \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$

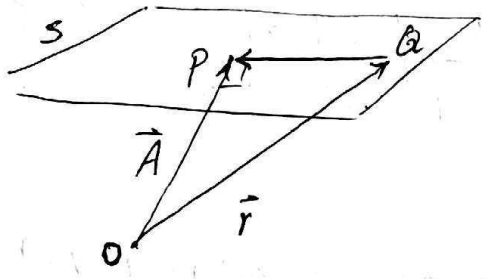
تمرین ۳:

مقادیر α را چنان تعیین کنید که تبدیل زیر را متعامد کند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

جواب تمرین ۱

فرض کنید $\vec{A}$ بردار پاره‌خطی از مبدأ به نقطه P که در صفحه ثابت است. فرض کنید $\vec{r}$ بردار پاره‌خطی از مبدأ به نقطه دلخواه $Q(x_1, x_2, x_3)$ باشد که $\vec{A}.\vec{r} = A^2$ معادله صفحه‌ای است عمود بر $\vec{A}$ که از نقطه P می‌گذرد.



$\vec{A} \perp S$

$\vec{PQ} \parallel S$

$\Rightarrow \vec{A} \perp \vec{PQ}$ ، $\vec{PQ} = \vec{A} - \vec{r}$

$\Rightarrow \vec{A}.\vec{PQ} = \vec{A}.(\vec{A} - \vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{A} - \vec{A}.\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{A}.\vec{r} = A^2}$ (α)

if $\vec{A} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$ ، $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

(α) $\Rightarrow \vec{A}.\vec{r} = ax + by + cz = A^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0$

Scanned with CamScanner

تمرین ۲-

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&1\\2&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$ ماتریس‌های زیر را تشکیل دهید:

الف) $|AB|=?$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&2\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-2&9\\5&3&3\end{pmatrix}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&-2&9\\5&3&3\end{vmatrix}=1(-33)+2(-42)+1(13)$$

$$=-33+13-84=-20-84=-104$$

ب) $AB-B^tA^t$

$$AB=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-2&9\\5&3&3\end{pmatrix}$$

$$B^t=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&-1&1\\0&2&3\end{pmatrix},\quad A^t=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&-1&1\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&0\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&5\\-2&-2&3\\1&9&3\end{pmatrix}$$

$$AB-B^tA^t=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-2&9\\5&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&5\\-2&-2&3\\1&9&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-4\\3&0&6\\4&-6&0\end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

حواب تمرین ۳ :

مقدار α را چنان تعیین کنید که تبدیل زیر یکانی شود.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = T$$

شرط یکانی $T^{\dagger}T = 1$ or $TT^{\dagger} = 1$ or $T^{\dagger} = T^{-1}$

$$T^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$TT^{\dagger} = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\alpha^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Scanned with CamScanner