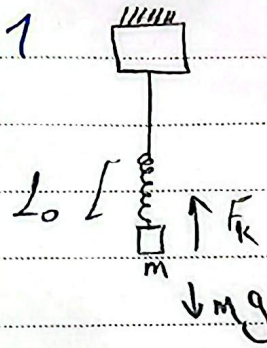
Subject:
Date

1.1



* تعریف خنثی تعادل آن است که برایند نیروهای وارد بر سیستم برابر با صفر باشد.

$\sum F = 0$

$-m\ddot{y} - ky + mg$

$-m\frac{d^2y}{dt^2} - ky = -mg \Rightarrow$

حل معادله:

$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = mg \Rightarrow$

تشکیل معادله مشخصه

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i = \omega i$

ابتدا جواب کلی

$\Rightarrow y_1(t) = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \Rightarrow y_1(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ جمع جواب

$\Rightarrow y_1(t) = C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$ کاملترین جواب است.

$\Rightarrow y_1(t) = C'\cos\omega t + C''\sin\omega t)$

* برای اینکه به جواب $A\cos(\omega t + \varphi)$ برسیم

$\Rightarrow$

$\begin{cases} C' = A\cos\varphi \\ C'' = -A\sin\varphi \end{cases}$ جایگذاری ثابت‌ها به عنوان

$y_1(t) = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t \Rightarrow \underline{A\cos(\omega t + \varphi)}$ و در نظر گیریم

* در حالت کلی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی همین ضریب ثابت.

Subject:
Date

* 1.2 هر چیز تبلی به طرف راست عادله‌دار حالت زیر داد رنظر میگیریم

برای هر سمت راست معادله:

* عدد ثابت ⟶ A (حدس اولیه)
* $f(t)$ چند جمله‌ای ⟶ $A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots$
* نمایی ⟶ $Ae^{\alpha t}$
* $\sin\omega t, \cos\omega t$ ⟶ $A\sin\omega t + B\cos\omega t$

* برای هر شکلی از توابع که در سمت راست عادله ظاهر می‌شود باید حدس اولیه برای تابع خود را بگیریم.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = -g \Rightarrow \text{یک عدد ثابت} \Rightarrow y = c$$

$$\frac{k}{m}c = -g \Rightarrow c = -\frac{gm}{k} = y_p \qquad y(t) = A\cos(\omega t + \theta) - \frac{gm}{k}$$

* در حالت کلی: عادله حرکت دیفرانسیل دارای دو جزء همان و خاص هستند جزء همان متناظر خاصی از سیستم (وقتی f صفر می‌شود) را بدست می‌دهد (این خاصی که گفتیم در نیروی از آن تشریح کردیم و فقط خودش است!) خاصی از سیستم m جرم آن و سختی فنر آن k است حالا معادله مشخصه‌ای که برای معادله حرکت دیفرانسیل می‌نویسیم فقط و فقط متناظر است به جزء همان، نیروی خارجی در جایی کردن از یک نقطه به نقطه تعادل تغییر ایجاد می‌کند اصطلاح به برداشتن آن

Subject:
Date

نقشی اخیف عن کند و همین برد حاتی صدیوط به فندوق سان (۱۵) آن است در نتیجه
عن اسن تی شیر ایوی ها دکارد

1.2d $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \Rightarrow \cos^5\frac{\theta}{5} = ?$

از تغییر متغیر استفاده می کنیم
و می نویسیم $x = \frac{\theta}{5}$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow$$

$$(\cos x)^5 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5 \Rightarrow$$

از بسط دو جمله ای نیوتن

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k \Rightarrow$$

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4}{2!} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

$$\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}A^{5-k}B^k \Rightarrow$$

$$e^{5ix} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix} \Rightarrow$$

$$e^{i5x} + 5e^{i3x} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} + e^{-i5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right) + 10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) + 5\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)$$

$$\left(2\cos 5x + 20\cos x + 10\cos 3x\right) \times \frac{1}{32} =$$

$$(\cos\frac{\theta}{5})^5 = \frac{1}{16}\cos\theta + \frac{20}{32}\cos\frac{\theta}{5} + \frac{10}{32}\cos\frac{3\theta}{5}$$

Subject:
Date

1.2a $(A+B)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-K} B^K$

$(\cos n\theta + i\sin n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \Rightarrow$

$(\cos 7\theta + \sin 7\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 \Rightarrow$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \sum_{K=0}^{7} \binom{7}{k} \cos^{7-K}\theta \, i^K \sin^K\theta$

$\cos 7\theta + \sin 7\theta = \cos^7\theta + 7i\cos^6\theta\sin\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta - 35i\cos^4\theta\sin^3\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta + 21i\cos^2\theta\sin^5\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta - i\sin^7\theta$

$\binom{7}{0} = 1$

$\binom{7}{1} = 7$

$\binom{7}{2} = 21$

$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(4!)} = 35$

$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(3!)} = 35$

$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$

$\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!1!} = 7$

$\binom{7}{7} = 1$

1.5 $\frac{d^3f(t)}{dt^3} + f(t) = 0$

* روش اول حل این روش استفاده از معادله مشخصه است (حل با λ)

$f(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$

$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$, $\frac{d^3f(t)}{dt^3} = \alpha^3 e^{\alpha t}$

$\Rightarrow \alpha^3 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} = 0 \Rightarrow e^{\alpha t}(\alpha^3 + 1) = 0$

$\alpha^3 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -1 \Rightarrow \alpha = -1$

$-1 = e^{i(\pi + 2K\pi)} \Rightarrow \alpha_K = e^{i\frac{\pi + 2K\pi}{3}}$

Subject:
Date

* حالا وقتی معادله مرتبه ۳ داریم جذر جواب برابر ۱ کن پیدا نمیشه

α رابه ازای $k=0$, $k=1$, $k=2$ حساب می کنیم.

$\alpha_0 = e^{i\frac{H}{3}}$, $\alpha_1 = e^{iH}$

$\alpha_2 = e^{i\frac{5H}{3}}$

$\alpha_1 = e^{iH} = -1$ ←

حالا چیزی که بدست آوردیم α ها جواب داخل معادله

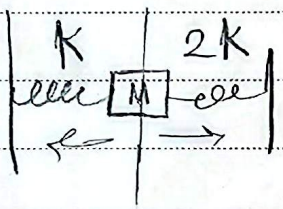
$f_1(t) = e^{-t}$,

$f_2(t) = e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$, $f_3(t) = e^{(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ ← قرار دهم

* منظور از جواب های حقیقی همان قسمت Re جواب هاست.

$f_0(t) = e^{-t}$, $f_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)$, $f_1(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

1.6



در فنرهایی که جهت حرکت موازی بسته شده اند هردو فنر

هنگام برابر جابجایی نقطه اتصال جرم در برابر این سوال

$F_{net} = F_1 + F_2 = -kx - 2kx \Rightarrow 3kx = m\ddot{x}$

$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$m\ddot{x} - 3kx = 0 \xrightarrow{\div m} \ddot{x} - \frac{3k}{m}x = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{3k}{m}x = 0 \quad \lambda^2 - \frac{3k}{m} = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{3k}{m}}$

$V_{max} = A\omega \Rightarrow A = \omega^{-1}V \Rightarrow \sqrt{\frac{3k}{M}}\,V$

PAPCO

Subject:
Date

1.7 نقطه تعادل بعدی مخرج است برای پتانسیل‌های داده شده نقطه‌ی تعادل است

$\frac{dV(x)}{dx}=0$ $\frac{E_0}{a^4}\left(4x^3+12ax^2-16a^2x\right)=0$ $\frac{dV}{dx}=F(x)$

$4x^3+12ax^2-16a^2x=0 \div 4 \Rightarrow x^2+3ax-4a^2=0$ $x=0$

$(x+4a)(x-a)=0 \Rightarrow x=-4a$ $x=0$ $x=a$

$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}<0$ ناپایدار $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=a}=\frac{20E_0}{a^2}>0$ پایدار

$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=-4a}>0 \Rightarrow$ پایدار

* تعادل زمانی پایدار است که مشتق دوم پتانسیل آن نسبت به (مکان روی محور x) مثبت باشد

* برای بررسی پتانسیل نزدیک نقاط تعادل از بسط تیلور حول نقطه x_0 استفاده می‌کنیم

$V(x)\approx V(x_0)+V'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2+\dots$

$V(\delta)=V(x_0)+\frac{1}{2}k\delta^2$ $\frac{1}{2}kx^2=V''\times\frac{1}{2}(x-x_0)^2$ $V''=k$

$x_0=a \Rightarrow k_{eff}=\frac{20E_0}{a^2} \Rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{20E_0}{ma^2}}$

Subject:
Date

$x_0 = 4a \Rightarrow K_{eff} = \frac{80E_0}{a^2} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{80E_0}{ma^2}}$

بخش دوم: جهت کنید خدا حرمت ایده حال بدا به مسائل مثل تقریب نوسان و حرف میزنیم به همین دلیل حرسبط تیلور هم برایما جواب ایده آل نیست فقط تا مرتبه 2 است به اولین جمله بعد از مرتبه‌ای که ما آن جواب را حساب میکنیم جمله اضافی گوشیم که این بسط تیلور حول نقطه تعادل چه چیزهایی به ما میدهد از آن صرف نظر کرده‌ایم یعنی جمله مرتبه 3

شرط نوسانات کوچک آن است که این جمله اضافی به جمله‌های پیش از خود کوچک باشد

$V(x_0+\delta) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''\delta^2$

$\left|\frac{1}{6}V'''(x_0)\delta^3\right| << \left|\frac{1}{2}V''(x_0)\delta^2\right|$

$V(x) = \sum_{n=0} \frac{V^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$