سؤالات و حل تشریحی آزمون میان‌ترم اول مکانیک کوانتومی ۱

کارشناسی فیزیک — ۲۱ آبان ۱۴۰۲

سؤال ۱

تا آنجا که آموخته‌اید، اصول موضوعه مکانیک کوانتومی را بیان کنید.

پاسخ تشریحی:

بنیان نظری مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی بر پنج اصل موضوعه اساسی استوار است که چگونگی توصیف حالت یک سامانه فیزیکی، کمیت‌های قابل اندازه‌گیری، نتایج و احتمالات اندازه‌گیری و تحول زمانی سامانه را مشخص می‌کنند:

1. **اصل اول (توصیف حالت سامانه در فضای هیلبرت):** حالت یک سامانه کوانتومی در هر لحظه t به‌طور کامل توسط یک بردار بهنجار *(کت)* $|\psi(t)\rangle$ در یک فضای برداری مختلط با ضرب داخلی کامل به نام فضای هیلبرت $(\mathcal{H})$ توصیف می‌شود *(در نمایش مکانی، این حالت با تابع موج بهنجارشده* $\psi(\vec{r},t) = \langle \vec{r}|\psi(t)\rangle$ *نمایش داده می‌شود که در شرط بهنجارش* $\int |\psi(\vec{r},t)|^2\, d^3r = 1$ *صدق می‌کند)*. هر دو بردار که تنها در یک ضریب فاز کلی $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ اختلاف دارند، بیانگر یک حالت فیزیکی یکسان هستند.

2. **اصل دوم (مشاهده‌پذیرها و عملگرهای هرمیتی):** هر کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری *(مشاهده‌پذیر)* A در مکانیک کوانتومی با یک عملگر خطی و هرمیتی $(\hat{A}^\dagger = \hat{A})$ در فضای هیلبرت نمایش داده می‌شود که مجموعه ویژه بردارهای آن یک پایه کامل در فضا تشکیل می‌دهند *(برای نمونه، در نمایش مکانی یک‌بعدی، عملگر مکان* $\hat{x} = x$ *و عملگر تکانه* $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ *است)*.

3. **اصل سوم (نتایج اندازه‌گیری و قاعده بورن):** تنها نتایج ممکن در اندازه‌گیری یک مشاهده‌پذیر A، ویژه مقادیر حقیقی $\{a_n\}$ عملگر هرمیتی متناظر $\hat{A}$ هستند *(*$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$*)*. اگر سامانه پیش از اندازه‌گیری در حالت بهنجار $|\psi\rangle$ باشد، احتمال به دست آوردن ویژه مقدار گسسته و غیرتبهگن a_n برابر است با:

$$P(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

در حالت طیف پیوسته a، چگالی احتمال یافتن نتیجه در بازه $(a, a+da)$ برابر $|\langle a|\psi\rangle|^2\, da$ است و مقدار چشمداشتی *(میانگین آماری)* مشاهده‌پذیر A در حالت $|\psi\rangle$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

4. **اصل چهارم (فروکاهش یا تقلیل بسته موج پس از اندازه‌گیری):** بلافاصله پس از اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر A روی سامانه و ثبت نتیجه a_n، حالت سامانه به‌طور ناگهانی به ویژه حالت بهنجار متناظر با آن ویژه مقدار *(و در صورت وجود تبهگنی، به تصویر بهنجارشده* $|\psi\rangle$ *روی زیرفضای ویژه متناظر با* a_n*)* فرو می‌کاهد:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}}$$

که برای ویژه مقدار غیرتبهگن برابر $|a_n\rangle$ است *(و اندازه‌گیری مجدد بلافاصله پس از آن با احتمال* 100 *همان مقدار* a_n *را خواهد داد)*.

5. **اصل پنجم (تحول زمانی سامانه و معادله شرودینگر):** تحول زمانی بردار حالت یک سامانه کوانتومی منزوی *(بسته)* در فاصله بین دو اندازه‌گیری، توسط معادله دیفرانسیل خطی و یکانی شرودینگر وابسته به زمان تعیین می‌شود:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

که در آن $\hat{H}$ عملگر هرمیتی هامیلتونی *(عملگر انرژی کل سامانه)* است.

---

coode.ir

سؤال ۲

ذره‌ی آزادی، در آغاز، با بسته موج زیر توصیف شده است،

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}.$$

مطلوب است:

الف) احتمال یافتن تکانه‌ی ذره در گستره $(p, p+dp)$.

ب) مقدار چشمداشتی انرژی ذره.

ج) برآوردی تقریبی از مقدار چشمداشتی انرژی ذره با استدلالی مبتنی بر اصل عدم قطعیت.

پاسخ تشریحی:

ابتدا بهنجار بودن تابع موج اولیه $\psi(x)$ را بررسی می‌کنیم ($\alpha > 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

بنابراین تابع موج $\psi(x)$ از ابتدا بهنجار است.

الف) احتمال یافتن تکانه‌ی ذره در گستره $(p, p+dp)$

تابع موج در فضای تکانه، $\phi(p)$، تبدیل فوریه تابع موج مکانی $\psi(x)$ است:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{ip}{h}x\right) dx$$

با مربع کامل کردن توان نمایی بر حسب x:

$$-\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{ip}{h}x = -\frac{\alpha}{2}\left(x^2 + \frac{2ip}{\hbar}x\right) = -\frac{\alpha}{2}\left(x + \frac{ip}{\hbar}\right)^2 - \frac{p^2}{2\hbar^2}$$

با استفاده از انتگرال گاوسی $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}(x+c)^2} \, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$ داریم:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \, e^{-p^2/(2\hbar^2)} = \left(\frac{1}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4} e^{-p^2/(2\hbar^2)}$$

(برای ذره آزاد، تکانه پایسته است و $|\phi(p,t)|^2 = |\phi(p,0)|^2$ در هر لحظه t ثابت می‌ماند.)

در نتیجه، احتمال $dP(p)$ برای یافتن تکانه ذره در بازه $(p, p+dp)$ عبارت است از:

$$dP(p) = |\phi(p)|^2 \, dp = \frac{1}{h\sqrt{\pi\alpha}} \, e^{-p^2/(\hbar^2)} \, dp$$

ب) مقدار چشمداشتی انرژی ذره

برای ذره آزاد با جرم m ($V(x) = 0$)، عملگر هامیلتونی برابر $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ است و چون انرژی ذره آزاد پایسته است ($\frac{d\langle H\rangle}{dt} = 0$)، مقدار چشمداشتی انرژی در تمام زمان‌ها برابر مقدار آن در $t = 0$ می‌باشد.

coole.ir

با محاسبه مشتق اول و دوم $\psi(x)$ نسبت به x:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\alpha x\psi(x)$$
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\alpha\psi(x) + \alpha^2x^2\psi(x) = \alpha(\alpha x^2 - 1)\psi(x)$$

با جایگذاری در انتگرال مقدار چشمداشتی انرژی:

$$\langle E\rangle = \langle H\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\left(-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi(x)\,dx = -\frac{h^2\alpha}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha x^2 - 1)|\psi(x)|^2\,dx$$

از آنجا که $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx = 1$ و

$$\langle x^2\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\left(\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{1}{2\alpha}$$

داریم:

$$\langle E\rangle = -\frac{h^2\alpha}{2m}\left(\alpha\cdot\frac{1}{2\alpha} - 1\right) = -\frac{h^2\alpha}{2m}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{h^2}{4m}$$

(همچنین از فضای تکانه با $\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^2|\phi(p)|^2\,dp = \frac{h^2}{2}$ نیز دقیقاً $\langle E\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{h^2}{4m}$ حاصل می‌شود.)

ج) برآورد تقریبی مقدار چشمداشتی انرژی با استدلالی مبتنی بر اصل عدم قطعیت

بسته موج گاوسی $\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha x^2/2}$ حول مبدأ متمرکز است ($\langle x\rangle = 0$ و $\langle p\rangle = 0$). با مقایسه نمای گاوسی $\frac{\alpha x^2}{2}$ با شکل استاندارد $\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}$، پهنای مکانی (عدم قطعیت مکان) بسته موج برابر است با:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

مطابق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta x\,\Delta p \geq \frac{h}{2}$ (که برای بسته موج گاوسی به صورت تساوی برقرار است)، عدم قطعیت تکانه ذره از مرتبه زیر برآورد می‌شود:

$$\Delta p \approx \frac{h}{2\Delta x} = \frac{h}{2(1/\sqrt{2\alpha})} = h\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

از آنجا که میانگین تکانه ذره صفر است ($\langle p\rangle = 0$)، داریم $\langle p^2\rangle = (\Delta p)^2 + \langle p\rangle^2 = (\Delta p)^2 \approx \frac{h^2}{2}$. بنابراین برآورد انرژی جنبشی چشمداشتی ذره آزاد عبارت است از:

$$\langle E\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{h^2}{4m}$$

(توجه: حتی اگر در یک برآورد مرتبه بزرگی، پهنای مکانی را به صورت تقریبی $\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ و عدم قطعیت تکانه را $\Delta p \sim \frac{h}{\Delta x} \sim h\sqrt{\alpha}$ در نظر بگیریم، باز هم به همان وابستگی پارامتری $\langle E\rangle \sim \frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{h^2}{2m}$ دست می‌یابیم.)

سؤال ۳

نشان دهید که عملگر پاریته،

$$P\psi(x) = \psi(-x),$$

cooler.ir

عملگری هرمیتی است.

پاسخ تشریحی:

یک عملگر خطی $\hat{P}$ روی فضای هیلبرت توابع موج مربع‌انتگرال‌پذیر $L^2(\mathbb{R})$ زمانی هرمیتی (خودالحاق) است که به ازای هر دو تابع موج دلخواه $\psi(x)$ و $\phi(x)$ در این فضا، تساوی زیر برقرار باشد:

$$\langle\phi|\hat{P}\psi\rangle = \langle\hat{P}\phi|\psi\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\big(\hat{P}\psi(x)\big)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\hat{P}\phi(x)\big)^*\psi(x)\,dx$$

با آغاز از سمت چپ تساوی و اعمال تعریف عملگر پاریته $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ داریم:

$$\langle\phi|\hat{P}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\psi(-x)\,dx$$

اکنون تغییر متغیر $u = -x$ را انجام می‌دهیم؛ در این صورت $x = -u$ و $dx = -du$ است و حدود انتگرال از $(-\infty, +\infty)$ به $(+\infty, -\infty)$ تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\hat{P}\psi\rangle &= \int_{+\infty}^{-\infty} \phi^*(-u)\psi(u)\,(-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(-u)\psi(u)\,du\end{aligned}$$

از آنجا که u یک متغیر مجازی انتگرال‌گیری است، می‌توانیم آن را مجدداً با x جایگزین کنیم:

$$\langle\phi|\hat{P}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(-x)\psi(x)\,dx$$

با توجه به اینکه $\hat{P}\phi(x) = \phi(-x)$ است، مزدوج مختلط آن برابر $\big(\hat{P}\phi(x)\big)^* = \phi^*(-x)$ می‌باشد. با جایگذاری در انتگرال فوق به دست می‌آوریم:

$$\langle\phi|\hat{P}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\hat{P}\phi(x)\big)^*\psi(x)\,dx = \langle\hat{P}\phi|\psi\rangle$$

بنابراین $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$ است و ثابت می‌شود که **عملگر پاریته یک عملگر هرمیتی است.**

(نکته تکمیلی: از آنجا که $\hat{P}^2\psi(x) = \hat{P}\psi(-x) = \psi(x)$ است، داریم $\hat{P}^2 = \hat{I}$؛ لذا عملگر پاریته علاوه بر هرمیتی بودن، عملگری یکانی نیز هست و ویژه مقادیر آن تنها ± 1 می‌باشند.)

توجه: پاسخ‌های تشریحی این فایل با استفاده از هوش مصنوعی تولید شده‌اند؛ لطفاً پیش از استناد نهایی، روابط و مراحل حل را بازبینی فرمایید.