

بردارها و نگاشت‌های خطی

Vectors and Linear Maps

درسنامه اول ریاضی فیزیک ۱

عباس‌رستمی

دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی صنعتی امیرکبیر

این نسخه برای مطالعه دانشجویان فیزیک و ریاضی فیزیک تنظیم شده است. ساختار مفهومی فصل، شماره تعریف‌ها و قضیه‌ها، فرمول‌ها، مثال‌ها، یادداشت‌های تاریخی و مجموعه مسائل حفظ شده‌اند؛ متن فارسی به صورت روان بازنویسی شده است تا برای جزوه درسی خواناتر باشد.

فهرست مطالب

۲	۲ بردارها و نگاشت‌های خطی
۲	۱.۲ فضاهای برداری
۳	۱.۱.۲ میدان‌ها و مثال‌هایی از فضاهای برداری
۴	۲.۱.۲ فضاهای زیرین
۷	۳.۱.۲ فضای خارج‌قسمتی
۷	۴.۱.۲ جمع مستقیم
۱۰	۵.۱.۲ حاصل ضرب تانسوری فضاهای برداری
۱۰	۲.۲ ضرب داخلی
۱۲	۱.۲.۲ متعامد بودن
۱۳	۲.۲.۲ فرایند گرام-اشمیت
۱۴	۳.۲.۲ نابرابری شوارتس
۱۵	۴.۲.۲ طول یا نرم بردار
۱۶	۳.۲ نگاشت‌های خطی
۱۸	۱.۳.۲ هسته یک نگاشت خطی
۲۰	۲.۳.۲ هم‌ریختی خطی
۲۲	۴.۲ ساختارهای مختلط
۲۵	۵.۲ تابع‌های خطی و فضای دوگان
۲۸	۶.۲ نگاشت‌های چندخطی
۳۰	۱.۶.۲ دترمینان یک عملگر خطی
۳۱	۲.۶.۲ الحاقی کلاسیک
۳۲	۷.۲ مسائل

فصل ۲

بردارها و نگاشت‌های خطی

بردارهای آشنای دوبعدی و سه‌بعدی را می‌توان به‌سادگی به ابعاد بالاتر تعمیم داد. اگر بردار را برحسب مؤلفه‌هایش نمایش دهیم، می‌توان بردارهایی با N مؤلفه در نظر گرفت. این مستقیم‌ترین تعمیم بردارهای صفحه و فضا است و چنین بردارهایی را **بردارهای دکارتی N -بعدی** می‌نامیم.

اما بردارهای دکارتی از دو جهت محدودند: مؤلفه‌های آن‌ها حقیقی‌اند و بعد آن‌ها متناهی است. بعضی کاربردهای فیزیک ایجاب می‌کنند که یکی یا هر دو محدودیت کنار گذاشته شوند. از این‌رو بهتر است مفهوم بردار را از وابستگی مستقیم به تعداد مؤلفه‌ها و حقیقی‌بودن مؤلفه‌ها رها کنیم و این ویژگی‌ها را پیامد تعریف‌های بنیادی‌تر بدانیم. در این بخش عمدتاً با فضاهای برداری متناهی‌بعدی سروکار داریم، ولی بسیاری از مفاهیم و مثال‌های آن به فضاهای بی‌نهایت‌بعدی نیز قابل تعمیم‌اند.^۱

2.1 فضاهای برداری

نخست تعریف یک فضای برداری انتزاعی مختلط را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱/۱/۲ – فضای برداری

یک فضای برداری V روی میدان $\mathbb{C}$ مجموعه‌ای از اشیاء است که با نمادهایی مانند $|a\rangle$ ، $|b\rangle$ ، $|x\rangle$ و غیره نمایش داده می‌شوند و آن‌ها را **بردار** می‌نامیم، به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

۱. برای هر دو بردار $|a\rangle, |b\rangle \in V$ ، برداری به نام $|a\rangle + |b\rangle$ در V وجود دارد که جمع آن‌هاست و:

$$(|a\rangle + |b\rangle) = |b\rangle + |a\rangle \quad (\text{آ})$$

$$(|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle \quad (\text{ب})$$

$$(|a\rangle + |0\rangle) = |a\rangle, \quad |0\rangle \in V \text{ وجود دارد که برای هر } |a\rangle \quad (\text{ج})$$

$$(|a\rangle \in V, \text{ بردار یکتایی } -|a\rangle \in V \text{ وجود دارد که } |a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle. \quad (\text{د})$$

۲. برای هر عدد مختلط α – که آن را **اسکالر** می‌نامیم – و هر بردار $|a\rangle \in V$ ، بردار $\alpha|a\rangle \in V$ وجود دارد، به‌گونه‌ای که

$$(\alpha(\beta|a\rangle)) = (\alpha\beta)|a\rangle \quad (\text{آ})$$

$$1|a\rangle = |a\rangle \quad (\text{ب})$$

۳. ضرب اسکالرها و بردارها توزیع‌پذیر است:

^۱در متن اصلی، $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط و $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است.

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle \quad (\text{آ})$$

$$(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle \quad (\text{ب})$$

یادداشت دربارهٔ نمادگذاری دیراک

نمادگذاری **برا و کت**، یعنی $|a\rangle$ و $\langle a|$ ، توسط دیراک معرفی شد و در فضاهای برداری مختلط بسیار سودمند است. با این حال، برای موضوعاتی مانند نرم و متریک گاهی دست‌وپاگیر می‌شود؛ در چنین مباحثی می‌توان از نمادگذاری معمول بردارها استفاده کرد.

فضای برداری بالا را **فضای برداری مختلط** می‌نامیم. اگر در تعریف، $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی، جایگزین کنیم، یک **فضای برداری حقیقی** به دست می‌آید.

2.1.1 میدان‌ها و مثال‌هایی از فضاهای برداری

اعداد حقیقی و مختلط نمونه‌هایی از یک ساختار ریاضی به نام **میدان** هستند. میدان F مجموعه‌ای از اشیاء است که دو عمل دودویی جمع و ضرب روی آن تعریف شده است؛ ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است، هر دو عمل دارای عضو همانی‌اند و هر عنصر $\alpha \in F$ دارای معکوس جمعی $-\alpha$ است و هر عنصر ناصفر نیز معکوس ضربی α^{-1} دارد.

مثال ۲/۱/۲ – چند فضای برداری

۱. $\mathbb{R}$ روی میدان اعداد حقیقی یک فضای برداری است.
۲. $\mathbb{C}$ روی میدان اعداد حقیقی یک فضای برداری است.
۳. $\mathbb{C}$ روی میدان اعداد مختلط یک فضای برداری است.
۴. اگر $V = \mathbb{R}$ باشد ولی اسکالرهای آن از $\mathbb{C}$ بگیریم، آنگاه V فضای برداری نیست؛ زیرا ضرب یک عدد مختلط در یک عدد حقیقی، لزوماً عددی حقیقی و در نتیجه عضوی از V نیست.
۵. مجموعهٔ «پیکان‌ها» در صفحه یا فضا، با قانون متوازی‌الاضلاع جمع، یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.
۶. اگر $P_c[t]$ مجموعهٔ چندجمله‌ای‌ها با ضرایب مختلط در متغیر t باشد، آنگاه با جمع معمول چندجمله‌ای‌ها و ضرب آن‌ها در اسکالرهای مختلط، $P_c[t]$ یک فضای برداری است و بردار صفر، چندجمله‌ای صفر است.
۷. برای عدد صحیح مثبت n ، مجموعهٔ $P_c^n[t]$ از چندجمله‌ای‌های مختلط با درجهٔ حداکثر n نیز فضای برداری است.
۸. مجموعهٔ $P_r^n[t]$ از چندجمله‌ای‌های حقیقی با درجهٔ حداکثر n روی $\mathbb{R}$ فضای برداری است، اما روی $\mathbb{C}$ فضای برداری نیست.
۹. فضای $\mathbb{C}^n$ را از همهٔ n -تایی‌های مختلط تشکیل می‌دهیم. اگر

$$|a\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |b\rangle = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

آنگاه

$$|a\rangle + |b\rangle = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\eta|a\rangle = (\eta\alpha_1, \dots, \eta\alpha_n),$$

$$|\circ\rangle = (\circ, \dots, \circ), \quad -|a\rangle = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n).$$

بنابراین $\mathbb{C}^n$ فضای مختصات مختلط n -بعدی است.

۱۰. $\mathbb{R}^n$ با اعمال مشابه، یک فضای برداری حقیقی n -بعدی، یعنی فضای دکارتی n -بعدی، است؛ ولی فضای برداری مختلط نیست.

۱۱. مجموعه همه ماتریس‌های مختلط $m \times n$ ، یعنی $M_{m \times n}$ ، با جمع ماتریسی و ضرب در اسکالر مختلط یک فضای برداری است. بردار صفر، ماتریس $m \times n$ صفر است.

۱۲. مجموعه $\mathbb{C}^\infty$ از دنباله‌های مختلط $\{ \alpha_i \}_{i=1}^\infty$ که

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$$

است، با اعمال مؤلفه‌به‌مؤلفه، یک فضای برداری مختلط است.

۱۳. مجموعه توابع مختلط پیوسته یک متغیر حقیقی روی بازه (a, b) یک فضای برداری مختلط است.

۱۴. مجموعه $C^n(a, b)$ از توابع حقیقی یک متغیر که مشتق‌های پیوسته تا مرتبه n دارند، فضای برداری حقیقی است.

۱۵. مجموعه $C_{ana}^\infty(a, b)$ از توابع حقیقی روی (a, b) که بسط تیلور دارند، فضای برداری حقیقی است.

این مثال‌ها نشان می‌دهند که فضای برداری نه تنها به ماهیت بردارها، بلکه به ماهیت اسکالرها نیز وابسته است.

تعریف ۳/۱/۲ - وابستگی خطی و ترکیب خطی

بردارهای $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$ را مستقل خطی می‌نامیم اگر از رابطه

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i |a_i\rangle = |\circ\rangle, \quad \alpha_i \in \mathbb{C},$$

نتیجه شود که $\alpha_i = 0$ برای همه i . عبارت

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i |a_i\rangle$$

را یک ترکیب خطی از مجموعه $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^n$ می‌نامیم.

2.1.2 فضاهای زیرین

اگر V یک فضای برداری باشد، می‌توان مجموعه‌ای W از بردارهای آن را به عنوان زیرمجموعه‌ای از V در نظر گرفت. اما صرف زیرمجموعه بودن تضمین نمی‌کند که W نسبت به ترکیب خطی بسته باشد.

تعریف ۴/۱/۲ – فضای زیرین

یک زیرمجموعه ناتهی W از فضای برداری V را **فضای زیرین** V می‌نامیم هرگاه برای هر $|a\rangle, |b\rangle \in W$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \in W.$$

هر فضای زیرین خود یک فضای برداری است. همچنین اشتراک دو فضای زیرین نیز یک فضای زیرین است.

مثال ۵/۱/۲ – نمونه‌هایی از فضاهای زیرین

- فضای اعداد حقیقی، زیرفضایی از $\mathbb{C}$ وقتی اسکالرهای حقیقی باشند.
- $\mathbb{R}$ زیرفضایی از $\mathbb{C}$ روی اسکالرهای مختلط نیست.
- همه بردارهای واقع در یک خطی که از مبدأ می‌گذرد، زیرفضایی از فضای پیکان‌های صفحه یا فضا هستند.
- $P_c^n[t]$ زیرفضایی از $P_c^n[t]$ است.
- با شناسایی $\mathbb{C}^{n-1}$ با بردارهای n -تایی که مؤلفه آخرشان صفر است، $\mathbb{C}^{n-1}$ زیرفضایی از $\mathbb{C}^n$ می‌شود؛ به‌طور کلی برای $m < n$ ، فضای $\mathbb{C}^m$ را می‌توان به زیرفضایی از $\mathbb{C}^n$ از همین راه شناسایی کرد.
- $M_{r \times s}$ زیرفضایی از $M_{m \times n}$ برای $r \leq m$ و $s \leq n$ است، اگر ماتریس $r \times s$ را با ماتریسی $m \times n$ که سطرها و ستون‌های اضافی آن صفرند شناسایی کنیم.
- $P_c^m[t]$ زیرفضایی از $P_c^n[t]$ برای $m < n$ است.
- $P_r^m[t]$ زیرفضایی از $P_r^n[t]$ برای $m < n$ است. هر دوی این فضاها فقط روی $\mathbb{R}$ فضای برداری‌اند.
- $\mathbb{R}^m$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ برای $m < n$ است. بنابراین صفحه $\mathbb{R}^2$ زیرفضایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ است و $\mathbb{R}^1 \simeq \mathbb{R}$ نیز زیرفضایی از هر دو است.
- اجتماع دو زیرفضا عموماً زیرفضا نیست. مثلاً اگر U محور x و W محور y در $\mathbb{R}^2$ باشند، جمع دو بردار یکی از U و دیگری از W عموماً روی هیچ‌یک از آن دو محور قرار ندارد.

قضیه ۶/۱/۲ – پوش خطی

اگر S هر مجموعه ناتهی از بردارهای یک فضای برداری V باشد، مجموعه همه ترکیب‌های خطی بردارهای S یک فضای زیرین از V است. این فضای زیرین را **پوش خطی** S می‌نامیم و با

$$\text{Span}\{S\}$$

نشان می‌دهیم. می‌گوییم S این فضا را می‌پوشاند.

تعریف ۷/۱/۲ – پایه و بعد

مجموعه B از بردارهای مستقل خطی که کل فضای V را می‌پوشاند، **پایه** V نامیده می‌شود. فضای برداری‌ای که دارای پایه متناهی باشد، **متناهی‌بعد** و در غیر این صورت **بی‌نهایت‌بعد** است.

قضیه ۸/۱/۲

تمام پایه‌های یک فضای برداری متناهی‌بعد تعداد یکسانی بردار دارند.

تعریف ۹/۱/۲ - بعد فضای برداری

تعداد عناصر یک پایه فضای برداری V را **بعد** آن می‌نامیم و با $\dim V$ نشان می‌دهیم. برای تأکید بر میدان اسکالرهای $\dim_{\mathbb{C}} V$ و $\dim_{\mathbb{R}} V$ نیز به کار می‌روند. فضای N -بعدی را گاهی با V_N نشان می‌دهیم.

اگر V یک فضای N -بعدی با پایه $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ باشد، برای هر بردار $|a\rangle \in V$ اسکالرهای یکتایی $\{\alpha_i\}$ وجود دارند به طوری که

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |a_i\rangle.$$

این اسکالرهای **مؤلفه‌های بردار در پایه** B می‌نامیم.

مثال ۱۰/۱/۲ - پایه‌های متداول

- عدد ۱ (یا هر عدد حقیقی ناصفر) پایه $\mathbb{R}$ است؛ بنابراین $\mathbb{R}$ یک‌بعدی است.
- اعداد ۱ و $i = \sqrt{-1}$ پایه $\mathbb{C}$ به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{R}$ هستند؛ بنابراین $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
- عدد ۱ (یا هر عدد مختلط ناصفر) پایه $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{C}$ است؛ پس $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. تغییر میدان اسکالر، بعد را تغییر داده است، هرچند خود بردارها همان‌اند.
- سه بردار $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ پایه فضا هستند، پس فضا سه‌بعدی است.
- پایه $P_c[t]$ را می‌توان با تک‌جمله‌ای‌های $1, t, t^2, \dots$ ساخت؛ بنابراین این فضا بی‌نهایت‌بعدی است.
- پایه استاندارد $\mathbb{C}^n$ عبارت است از

$$\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \hat{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

- پایه $M_{m \times n}$ از ماتریس‌های E_{ij} تشکیل می‌شود که فقط در درایه (i, j) برابر ۱ و در دیگر درایه‌ها صفرند.
- چندجمله‌ای‌های $1, t, t^2, \dots, t^n$ پایه $P_c^n[t]$ هستند؛ در نتیجه $\dim P_c^n[t] = n + 1$.
- پایه استاندارد $\mathbb{C}^n$ همچنین پایه $\mathbb{R}^n$ است و $\dim \mathbb{R}^n = n$.
- اگر $a < 0 < b$ باشد، تک‌جمله‌ای‌های $1, x, x^2, \dots$ پایه‌ای برای فضای $C_{ana}^\infty(a, b)$ می‌سازند؛ زیرا هر تابع این فضا، به حکم قضیه تیلور، حول $x = 0$ دارای بسط توانی است. بنابراین این فضا بی‌نهایت‌بعدی است.

یادداشت ۱/۱/۲

اگر $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^n$ پایه فضای V باشد، پوش هر m بردار از این پایه، برای $m < n$ ، یک زیرفضای m -بعدی از V است.

2.1.3 فضای خارج‌قسمتی

فرض کنید W زیرفضایی از V باشد. روی V رابطه‌ای تعریف می‌کنیم: اگر $|a\rangle, |b\rangle \in V$ باشند، می‌گوییم $|a\rangle \sim |b\rangle$ و هم‌ارزند و می‌نویسیم $|a\rangle \sim |b\rangle$ هرگاه $|a\rangle - |b\rangle \in W$. این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی $|a\rangle$ را با $[a]$ نشان می‌دهیم و مجموعه همه کلاس‌ها را با V/W نمایش می‌دهیم. جمع و ضرب اسکالر را به شکل

$$\alpha[a] + \beta[b] = [\alpha a + \beta b] \quad (1.2)$$

تعریف می‌کنیم. باید اطمینان حاصل کنیم که این تعریف مستقل از انتخاب نماینده کلاس باشد. اگر $[a'] = [a]$ و $[b'] = [b]$ ، آنگاه

$$a' = a + w_1, \quad b' = b + w_2, \quad w_1, w_2 \in W,$$

و بنابراین

$$(\alpha a' + \beta b') - (\alpha a + \beta b) = \alpha w_1 + \beta w_2 \in W.$$

پس تعریف بالا درست است.

گاهی $[a]$ را به صورت $a + W$ نیز می‌نویسیم. در این نمادگذاری روابط

$$w + W = W, \quad W + W = W, \quad \alpha W = W, \quad \alpha W + \beta W = W$$

بیان‌کننده همان بسته‌بودن W تحت جمع و ضرب اسکالرند.

اگر $\{|a_i\rangle\}$ پایه W باشد و آن را به پایه $\{|a_i\rangle, |b_j\rangle\}$ برای V گسترش دهیم، آنگاه $\{|b_j\rangle\}$ پایه V/W است. در واقع هر $[a] \in V/W$ را می‌توان به صورت

$$[a] = \sum_j \kappa_j [b_j]$$

نوشت و اگر یک ترکیب خطی از $[b_j]$ صفر باشد، مستقل خطی بودن پایه V نشان می‌دهد همه ضرایب صفرند. ازاین‌رو

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W. \quad (2.2)$$

2.1.4 جمع مستقیم

گاهی مفید است فضای برداری را به زیرفضاهای ویژه‌ای تجزیه کنیم. برای مثال، حرکت یک ذره در $\mathbb{R}^3$ تحت اثر نیروی مرکزی را می‌توان به مؤلفه موازی تکانه زاویه‌ای و مؤلفه واقع در صفحه عمود بر آن تجزیه کرد.

تعریف جمع دو زیرفضا. اگر U, W دو زیرفضا از V باشند، $U + W$ مجموعه بردارهای V است که بتوان آن‌ها را به صورت جمع یک بردار از U و یک بردار از W نوشت. این مجموعه یک زیرفضا است.

مثال ۱۱/۱/۲

فرض کنید U صفحه xy و W صفحه yz در $\mathbb{R}^3$ باشند. آنگاه $U + W = \mathbb{R}^3$. برای هر (x, y, z) می‌توان نوشت

$$(x, y, z) = (x, \frac{1}{2}y, 0) + (0, \frac{1}{2}y, z),$$

اما این تجزیه یکتا نیست؛ برای نمونه

$$(x, y, z) = (x, \frac{1}{3}y, 0) + (0, \frac{2}{3}y, z)$$

نیز ممکن است.

تعریف ۱۲/۱/۲ – جمع مستقیم

اگر U و W زیرفضاهای V باشند و

$$V = U + W, \quad U \cap W = \{0\},$$

می‌گوییم V جمع مستقیم U و W است و می‌نویسیم

$$V = U \oplus W.$$

گزاره ۱۳/۱/۲ – یکتایی تجزیه در جمع مستقیم

اگر $V = U + W$ باشد، آنگاه

$$V = U \oplus W$$

اگر و تنها اگر هر بردار ناصفر V را بتوان به صورت یکتای «یک بردار از U به علاوه یک بردار از W » نوشت.

اثبات. اگر $V = U \oplus W$ و

$$|v\rangle = |u\rangle + |w\rangle = |u'\rangle + |w'\rangle,$$

آنگاه

$$|u\rangle - |u'\rangle = |w'\rangle - |w\rangle.$$

طرف چپ در U و طرف راست در W است؛ پس این بردار در $U \cap W$ قرار دارد و بنابراین صفر است. در نتیجه $|u\rangle = |u'\rangle$ و $|w\rangle = |w'\rangle$.

برعکس، اگر نمایش هر بردار یکتا باشد و $|a\rangle \in U \cap W$ ، آنگاه می‌توان $|a\rangle$ را به دو صورت مختلف نوشت:

$$|a\rangle = \frac{1}{3}|a\rangle + \frac{2}{3}|a\rangle = \frac{1}{4}|a\rangle + \frac{3}{4}|a\rangle,$$

که بخش‌های نخست و دوم، به ترتیب در U و W هستند. یکتایی فقط در صورتی برقرار است که $|a\rangle = 0$. پس $U \cap W = \{0\}$ و بنابراین جمع، مستقیم است.

تعریف ۱۴/۱/۲ – جمع مستقیم چند زیرفضا

اگر $\{U_i\}_{i=1}^r$ زیرفضاهای V باشند به طوری که

$$V = U_1 + \cdots + U_r, \quad U_i \cap U_j = \{0\} \quad (i \neq j),$$

می‌گوییم V جمع مستقیم این زیرفضاهاست و می‌نویسیم

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r = \bigoplus_{i=1}^r U_i.$$

اگر $W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ باشد و $|u_i\rangle \in U_i$ بردارهای ناصفر باشند، رابطه

$$\alpha_1|u_1\rangle + \cdots + \alpha_s|u_s\rangle = 0 \quad (3.2)$$

نهایتاً مستلزم آن است که همه $\alpha_i = 0$ باشند. بنابراین بردارهایی که از زیرفضاهای مختلف می‌آیند مستقل خطی‌اند.

گزاره ۱۵/۱/۲

بردارهای متعلق به زیرفضاهای متفاوت در تعریف ۱۴/۱/۲ مستقل خطی‌اند.

گزاره ۱۶/۱/۲

اگر U زیرفضایی از V باشد، زیرفضایی W وجود دارد به گونه‌ای که

$$V = U \oplus W.$$

اثبات. یک پایه U را به یک پایه V گسترش دهید و W را پوش بردارهای افزوده شده بگیرید.

مثال ۱۷/۱/۲

اگر U صفحه xy و W محور z در $\mathbb{R}^3$ باشند،

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z),$$

و این تجزیه یکتا است. بنابراین

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

گزاره ۱۸/۱/۲ – بعد جمع مستقیم

اگر $V = U \oplus W$ باشد، آنگاه

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

اکنون اگر U و V دو فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشند، حاصل ضرب دکارتی آن‌ها را در نظر می‌گیریم و اعمال

$$\alpha(|u\rangle, |v\rangle) = (\alpha|u\rangle, \alpha|v\rangle),$$

$$(|u_1\rangle, |v_1\rangle) + (|u_2\rangle, |v_2\rangle) = (|u_1\rangle + |u_2\rangle, |v_1\rangle + |v_2\rangle) \quad (۴.۲)$$

را تعریف می‌کنیم. با $(| \bullet \rangle_U, | \bullet \rangle_V)$ به عنوان بردار صفر، فضای حاصل یک فضای برداری است و با شناسایی

$$U = \{(|u\rangle, | \bullet \rangle_V)\}, \quad V = \{(| \bullet \rangle_U, |v\rangle)\},$$

این دو فضا به زیرفضاهای جمع مستقیم تبدیل می‌شوند.

گزاره ۱۹/۱/۲

حاصل ضرب دکارتی $W = U \times V$ با اعمال بالا یک فضای برداری است و، با شناسایی طبیعی دو فضا،

$$W = U \oplus V.$$

اگر $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^M$ پایه U و $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$ پایه V باشند، پایه جمع مستقیم از بردارهای

$$|c_k\rangle = \begin{cases} (|a_k\rangle, | \bullet \rangle_V), & 1 \leq k \leq M, \\ (| \bullet \rangle_U, |b_{k-M}\rangle), & M+1 \leq k \leq M+N \end{cases} \quad (۵.۲)$$

تشکیل می‌شود. پس

$$\dim(U \oplus V) = M + N.$$

قضیه ۲۰/۱/۲

اگر $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^M$ پایه U و $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$ پایه V باشند، بردارهای تعریف‌شده در رابطه (۵/۲) یک پایه $W = U \oplus V$ می‌سازند. در نتیجه

$$\dim W = M + N.$$

2.1.5 حاصل ضرب تانسوری فضاهای برداری

جمع مستقیم تنها یکی از روش‌های ساخت فضای برداری جدید از دو فضای دیگر است. روش مهم دیگری، **حاصل ضرب تانسوری** است. روی حاصل ضرب دکارتی $U \times V$ قواعد

$$\alpha(|u\rangle, |v\rangle) = (\alpha|u\rangle, |v\rangle) = (|u\rangle, \alpha|v\rangle),$$

و خطی بودن نسبت به هر ورودی را تحمیل می‌کنیم. این قواعد $U \times V$ را به فضایی موسوم به $U \otimes V$ تبدیل می‌کنند.

بردارهای این فضا به شکل $|u\rangle \otimes |v\rangle$ (و گاهی $|uv\rangle$) نوشته می‌شوند. اگر

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^M \alpha_i |a_i\rangle, \quad |v\rangle = \sum_{j=1}^N \beta_j |b_j\rangle,$$

آنگاه

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_i \beta_j |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle.$$

پس $\{|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle\}$ پایه $U \otimes V$ است و

$$\dim(U \otimes V) = \dim U \dim V.$$

همچنین

$$|\circ\rangle_U \otimes |v\rangle = \circ, \quad |u\rangle \otimes |\circ\rangle_V = \circ.$$

2.2 ضرب داخلی

یک فضای برداری به‌تنهایی برای بسیاری از کاربردهای فیزیکی بیش از حد کلی و فاقد ساختار است. یکی از مهم‌ترین ساختارهایی که می‌توان بر آن افزود، **ضرب داخلی** است.

در صفحه و فضا، ضرب نقطه‌ای دو بردار a و b را می‌توان نگاشتی دانست که به هر جفت بردار یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد و خواص تقارن، خطی بودن و مثبت بودن را داراست. اگر بخواهیم این مفهوم را به فضای مختلط تعمیم دهیم، خطی بودن همزمان در هر دو ورودی به تناقض می‌انجامد، زیرا برای بردار ناصفر a داریم

$$g(ia, ia) = i^2 g(a, a) = -g(a, a), \quad (۷.۲)$$

درحالی‌که طول باید مثبت باشد. راه‌حل این است که یکی از آرگومان‌ها را نسبت به مختلط مزدوج خطی کنیم.

ما قرارداد زیر را به کار می‌بریم: آرگومان اول مزدوج خطی و آرگومان دوم خطی باشد. در این صورت

$$g(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, |c\rangle) = \alpha^* g(|a\rangle, |c\rangle) + \beta^* g(|b\rangle, |c\rangle),$$

و تقارن به شکل

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = g(|b\rangle, |a\rangle)^*$$

درمی‌آید.

تعریف ۱/۲/۲ - ضرب داخلی

ضرب داخلی دو بردار $|a\rangle, |b\rangle \in V$ عددی مختلط $\langle a|b\rangle \in \mathbb{C}$ است که:

$$1. \quad \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$$

$$2. \quad \langle a|(\kappa|b\rangle + \chi|c\rangle) = \kappa\langle a|b\rangle + \chi\langle a|c\rangle$$

$$3. \quad \langle a|a\rangle \geq 0 \text{ و } \langle a|a\rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } |a\rangle = 0.$$

شرط سوم را **مثبت‌معین بودن** می‌نامیم.

ضرب داخلی حقیقی مثبت‌معین را گاهی **ضرب داخلی اقلیدسی** و در حالت‌های کلی‌تر **ضرب داخلی شبه‌اقلیدسی** می‌نامیم. از آنجا که مزدوج‌گیری وجود دارد، این ضرب داخلی در فضای مختلط دوخطی واقعی نیست، بلکه **هرفیتی یا نیمه‌خطی (sesquilinear)** است.

برای یک ترکیب خطی در کت داریم

$$\langle a|(\kappa|b\rangle + \chi|c\rangle) = \kappa\langle a|b\rangle + \chi\langle a|c\rangle, \quad (8.2)$$

درحالی‌که در برا، ضرایب مزدوج می‌شوند:

$$(\kappa\langle b| + \chi\langle c|)|a\rangle = \kappa^*\langle b|a\rangle + \chi^*\langle c|a\rangle. \quad (9.2)$$

فضایی که روی آن ضرب داخلی تعریف شده باشد، **فضای ضرب داخلی** نام دارد.

مثال ۳/۲/۲ - چند ضرب داخلی مهم

• برای $|a\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ و $|b\rangle = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ ضرب داخلی طبیعی:

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \beta_i.$$

• در $\mathbb{R}^n$ همین تعریف بدون مزدوج‌گیری مختلط به کار می‌رود.

• برای دنباله‌های مختلط،

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^* \beta_i,$$

به شرط همگرایی.

• اگر $x(t), y(t) \in P_c[t]$ باشند و $w(t)$ تابع وزن حقیقی، پیوسته و مثبت روی (a, b) باشد، آنگاه

$$\langle x|y\rangle = \int_a^b w(t) x^*(t) y(t) dt. \quad (10.2)$$

• برای توابع مختلط پیوسته نیز

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx$$

یک ضرب داخلی استاندارد است، مشروط بر مثبت بودن تابع وزن.

2.2.1 متعامد بودن

بردارهای هندسهٔ تحلیلی اغلب با بردارهای یکه عمود بر هم بیان می‌شوند. این مفهوم در فضای ضرب داخلی نیز بنیادی است.

تعریف ۴/۲/۲ – متعامد و متعامد هنجار

دو بردار $|a\rangle, |b\rangle$ را **متعامد** می‌نامیم اگر

$$\langle a|b\rangle = 0.$$

بردار **نرمال شده** یا یکه، $|e\rangle$ ، برداری است که

$$\langle e|e\rangle = 1.$$

پایهٔ $B = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^N$ را **متعامد هنجار** می‌نامیم اگر

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (11.2)$$

δ_{ij} را **دلتا کرونکر** می‌نامیم.

مثال ۵/۲/۲ – ضرب داخلی روی جمع مستقیم

اگر $W = U \oplus V$ و $|w_i\rangle = (|u_i\rangle, |v_i\rangle)$ باشد، می‌توان تعریف کرد

$$\langle w_1|w_2\rangle = \langle u_1|u_2\rangle + \langle v_1|v_2\rangle. \quad (12.2)$$

در این صورت هر بردار از U بر هر بردار از V عمود است.

مثال ۶/۲/۲ – پایه‌های متعامد هنجار

پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ متعامد هنجار است. همچنین در فضای توابع روی $(0, 2\pi)$ با $w(x) = 1$ توابع

$$e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

متعامد هنجارند، زیرا

$$\langle e_k|e_k\rangle = 1, \quad \langle e_l|e_k\rangle = 0 \quad (l \neq k).$$

$$\langle e_l | e_k \rangle = \delta_{lk} \quad \text{بنابراین}$$

2.2.2 فرایند گرام-اشمیت

هر پایه را می‌توان با گرفتن ترکیب‌های خطی مناسب به یک پایه متعامدهنجار تبدیل کرد. این فرایند را **متعامدهنجا کردن گرام-اشمیت** می‌نامیم.

اگر $B = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ یک پایه باشد، نخست

$$|e_1\rangle = \frac{|a_1\rangle}{\sqrt{\langle a_1 | a_1 \rangle}}.$$

سپس مؤلفه $|a_2\rangle$ در راستای $|e_1\rangle$ را حذف می‌کنیم:

$$|e'_2\rangle = |a_2\rangle - |e_1\rangle\langle e_1 | a_2 \rangle, \quad |e_2\rangle = \frac{|e'_2\rangle}{\sqrt{\langle e'_2 | e'_2 \rangle}}.$$

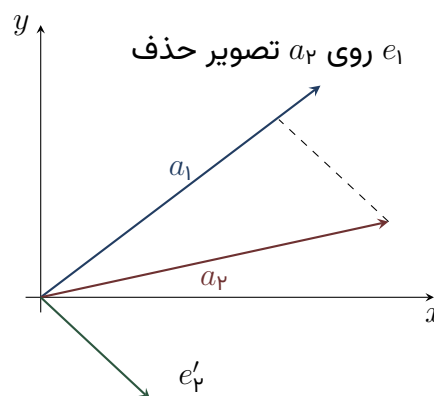
برای بردار سوم،

$$|e'_3\rangle = |a_3\rangle - |e_1\rangle\langle e_1 | a_3 \rangle - |e_2\rangle\langle e_2 | a_3 \rangle.$$

این بردار بر هر دو $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ عمود است. در حالت کلی اگر m بردار متعامدهنجار ساخته باشیم، داریم

$$|e'_{m+1}\rangle = |a_{m+1}\rangle - \sum_{i=1}^m |e_i\rangle\langle e_i | a_{m+1} \rangle,$$

$$|e_{m+1}\rangle = \frac{|e'_{m+1}\rangle}{\sqrt{\langle e'_{m+1} | e'_{m+1} \rangle}}. \quad (13.2)$$



تصویر مفهومی فرایند گرام-اشمیت

ایده ساده است: از بردار بعدی، تمام مؤلفه‌هایی را که در راستای بردارهای متعامدهنجار قبلی قرار دارند حذف می‌کنیم؛ سپس بردار باقی‌مانده را نرمال می‌کنیم. بنابراین در هر گام، یک جهت کاملاً جدید و عمود بر همه جهت‌های قبلی تولید می‌شود.

یادداشت تاریخی – اِرهارد اشمیت (۱۸۷۶–۱۹۵۹)

اِرهارد اشمیت دکترای خود را زیر نظر داوید هیلبرت گرفت و علاقه اصلی او معادلات انتگرالی و فضاهای هیلبرت بود. نام او در فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت ماندگار شده است؛ فرایندی که یک پایه را به پایه‌ای متعامد هنجار تبدیل می‌کند، هرچند نمونه‌ای ویژه از این ایده بسیار پیش‌تر از گرام و اشمیت نیز در کار لاپلاس دیده می‌شد. اشمیت در سال ۱۹۰۸ روی دستگاه‌هایی با بی‌نهایت معادله و بی‌نهایت مجهول کار کرد و از آنجا ایده‌های هندسی جدیدی برای فضاهای تابعی پدیدار شدند. این مسیر سرانجام به هندسه فضاهای هیلبرت انجامید. هیلبرت توابع را از طریق ضرایب فوریه می‌دید و شرط جمع‌پذیری مربعات ضرایب را در نظر می‌گرفت. ریس و فیشِر تناظر یک‌به‌یک میان توابع مربع‌پذیر انتگرال و دنباله‌های جمع‌پذیر مربعی ضرایب فوریه را نشان دادند. در سال ۱۹۰۷، اشمیت و فرشه نشان دادند که اگر دنباله‌های جمع‌پذیر مربعی را مختصات نقاط یک فضای بی‌نهایت بعدی بدانیم، می‌توان توابع را همچون نقاط یک تعمیم بی‌نهایت بعدی از فضای اقلیدسی دید؛ چیزی که امروزه آن را فضای هیلبرت می‌نامیم.

2.2.3 نابرابری شوارتس

یکی از مهم‌ترین نامساوی‌های فضاهای ضرب داخلی در همه ابعاد متناهی و نامتناهی معتبر است و در دو و سه بعد با این واقعیت هندسی متناظر است که کسینوس زاویه میان دو بردار از یک تجاوز نمی‌کند.

قضیه ۷/۲/۲ – نابرابری شوارتس

برای هر دو بردار $|a\rangle, |b\rangle$ در یک فضای ضرب داخلی،

$$\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2.$$

تساوی زمانی برقرار است که دو بردار متناسب باشند.

اثبات. بردار

$$|c\rangle = |b\rangle - \frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle} |a\rangle$$

را در نظر بگیرید. داریم $\langle a|c\rangle = 0$ و

$$|b\rangle = \frac{\langle a|b\rangle}{\langle a|a\rangle} |a\rangle + |c\rangle.$$

پس

$$\langle b|b\rangle = \frac{|\langle a|b\rangle|^2}{\langle a|a\rangle} + \langle c|c\rangle \geq \frac{|\langle a|b\rangle|^2}{\langle a|a\rangle},$$

و بنابراین

$$\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2.$$

□

تساوی فقط وقتی رخ می‌دهد که $|c\rangle = 0$ و در نتیجه $|a\rangle$ و $|b\rangle$ متناسب باشند.

یادداشت تاریخی – کارل هرمان آمادئوس شوارتس (۱۸۴۳–۱۹۲۱)

کارل هرمان آمادئوس شوارتس، فرزند یک معمار، در سرزمینی که امروزه بخشی از لهستان است به دنیا آمد. او پس از تحصیل مقدماتی مدتی شیمی خواند و سپس به ریاضیات روی آورد و در سال ۱۸۶۴ دکترا گرفت. او به شدت از کومر و وایراشتراس اثر پذیرفت و بعدها در هاله، زوریخ، گوتینگن و سرانجام برلین فعالیت کرد.

شوارتس ابزار مورد علاقه‌اش هندسه بود و از آن در تحلیل استفاده می‌کرد. او برخی نتایج ریمان را که پیش‌تر محل اختلاف بودند به‌طور قطعی اثبات کرد و در مسائل نگاشت همدیس، لم شوارتس و اصل بازتاب نقش داشت. همچنین دربارهٔ سطوح کمینه، تغییرات دوم در انتگرال‌های چندگانه و کوچک‌ترین مقدار ویژهٔ برخی معادلات دیفرانسیل کار کرد. در کنار ریاضیات، شوارتس علایق عملی هم داشت؛ از جمله فرماندهی آتش‌نشانی داوطلبانهٔ محل و کمک به مسئول ایستگاه راه‌آهن در بستن در قطارها.

2.2.4 طول یا نرم بردار

تعریف ۸/۲/۲ – نرم بردار

در فضای ضرب داخلی، **نرم** یا طول بردار $|a\rangle$ را با $\|a\|$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}.$$

نرم دارای خواص زیر است:

$$1. \quad \|0\rangle = 0;$$

$$2. \quad \|a\| \geq 0 \text{ و } \|a\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } a = 0;$$

$$3. \quad \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|;$$

$$4. \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ که همان نابرابری مثلثی است.}$$

هر تابعی روی فضای برداری که این چهار ویژگی را داشته باشد، یک **نرم** است و فضای مجهز به آن را **فضای خطی نرم‌دار** می‌نامیم. برای تعریف فاصله، حتی نیازی به فضای برداری نداریم؛ در هر فضای نرم‌دار می‌توان

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

را به‌عنوان فاصله تعریف کرد. از سوی دیگر، مثلاً سطح کره با تعریف فاصلهٔ مناسب یک فضای متریک است ولی روی نقاط آن جمع برداری طبیعی وجود ندارد و بنابراین فضای برداری نیست.

هر فضای ضرب داخلی خودبه‌خود فضای نرم‌دار است، اما عکس آن لزوماً درست نیست. باین‌حال اگر نرم از قانون متوازی‌الاضلاع پیروی کند، یعنی

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2, \quad (14.2)$$

می‌توان ضرب داخلی را به‌صورت

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{4} \left[\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 - i \left(\|a + ib\|^2 - \|a - ib\|^2 \right) \right] \quad (15.2)$$

بازیابی کرد.

قضیه ۹/۲/۲

یک فضای خطی نرم‌دار، فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر نرم آن از قانون متوازی‌الاضلاع پیروی کند.

برای هر فضای N -بعدی V ، یک پایه $\{|a_i\rangle\}$ انتخاب کنید و اگر مؤلفه‌های $|a\rangle$ در این پایه $\{\alpha_i\}$ باشند، تعریف

$$\|a\|^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2$$

یک نرم می‌دهد که قانون متوازی‌الاضلاع را ارضا می‌کند.

قضیه ۱۰/۲/۲

هر فضای برداری متناهی‌بعد را می‌توان به یک فضای ضرب داخلی تبدیل کرد.

مثال ۱۱/۲/۲ – چند فاصله مختلف در $\mathbb{C}^n$

برای $|a\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، نرم طبیعی

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}$$

و فاصله متناظر

$$d_2(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^2}$$

است. اما نرم‌های دیگری نیز وجود دارند، مانند

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|,$$

و در حالت کلی

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N},$$

که فاصله متناظر آن

$$d_p(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^p \right)^{1/p}$$

است. حالت‌های $p=1$ و $p=2$ همان دو نرم بالا هستند.

2.3 نگاشت‌های خطی

اکنون می‌خواهیم ساختارهای فضایی را از یک فضای برداری به فضای دیگر منتقل کنیم. وسیله این انتقال، نگاشت خطی یا تبدیل خطی است.

پیش از تعریف رسمی، نمونه‌هایی از نگاشت داریم:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 4,$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y),$$

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(t) = (t + 3, 2t - 5).$$

حرکت یک ذره در فضا نیز می‌تواند به صورت نگاشتی از بازهٔ زمان $[a, b]$ به $\mathbb{R}^3$ دیده شود:

$$M(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

در یک نگاشت عمومی $F: V \rightarrow W$ معمولاً تصویر ترکیب خطی با ترکیب خطی تصاویر برابر نیست:

$$F(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) \neq \alpha F(|a\rangle) + \beta F(|b\rangle).$$

تعریف ۲/۳/۲ - نگاشت خطی

نگاشت $T: V \rightarrow W$ از فضاهای برداری روی یک میدان مشترک خطی است هرگاه

$$T(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha T|a\rangle + \beta T|b\rangle$$

برای همهٔ $|a\rangle, |b\rangle \in V$ و اسکالرهایی α, β برقرار باشد. اگر $T: V \rightarrow V$ باشد، آن را **اندومورفیسم** یا **عملگر خطی** می‌نامیم.

مجموعهٔ نگاشت‌های خطی $V \rightarrow W$ را با $L(V, W)$ نشان می‌دهیم و خود این مجموعه یک فضای برداری است. نگاشت صفر هر بردار V را به بردار صفر W می‌فرستد و

$$(T + U)|a\rangle = T|a\rangle + U|a\rangle, \quad (\alpha T)|a\rangle = \alpha(T|a\rangle).$$

برای اندومورفیسم‌ها از $L(V)$ یا $\text{End}(V)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴/۳/۲ - نگاشت هم‌متریک

اگر V و U فضاهای ضرب داخلی باشند، نگاشت خطی $T: V \rightarrow U$ را **هم‌متریک** می‌نامیم هرگاه

$$\langle Ta | Tb \rangle = \langle a | b \rangle$$

برای همهٔ $|a\rangle, |b\rangle \in V$ برقرار باشد. اگر $U = V$ باشد، T یک هم‌متریک خطی یا به اختصار یک هم‌متری است. در فضای مختلط آن را عملگر واحدی و در فضای حقیقی عملگر متعامد نیز می‌نامند.

مثال ۵/۳/۲ - چند عملگر خطی

۱. در فضای یک‌بعدی، مثلاً $V = \mathbb{C}$ ، هر اندومورفیسم خطی به صورت $T|x\rangle = \alpha|x\rangle$ است. اگر T هم‌متریک باشد، $|\alpha|^2 = 1$. در $\mathbb{R}$ ، یک هم‌متریک فقط $T|x\rangle = \pm|x\rangle$ است.

۲. اگر π یک جایگشت از $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد و $|x\rangle = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ، آنگاه

$$A_\pi|x\rangle = (\eta_{\pi(1)}, \dots, \eta_{\pi(n)})$$

یک عملگر خطی است.

۳. برای $x(t) = \sum_{k=0}^n \Theta_k t^k$ ، عملگر مشتق D به صورت

$$Dx(t) = \sum_{k=1}^n k \Theta_k t^{k-1}$$

تعریف می‌شود و خطی است.

۴. عملگر انتگرال S :

$$Sx(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\Theta_k}{k+1} t^{k+1}$$

خطی است.

۵. اگر $Gf = g(t)f(t)$ باشد، که g تابعی ثابت و مناسب است، آنگاه G خطی است. عمل ضرب در t نیز یک عملگر خطی است.

نکته بنیادی

دو تبدیل خطی $T, U : V \rightarrow W$ برابرند اگر و تنها اگر روی بردارهای یک پایه V یکسان عمل کنند. در نتیجه، یک نگاشت خطی کاملاً با اثرش روی یک پایه تعیین می‌شود.

قضیه ۷/۳/۲

اگر T اندومورفیسمی از یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه $T = 0$ اگر و تنها اگر

$$\langle b|T|a \rangle = 0$$

برای همه $|a\rangle, |b\rangle$ برقرار باشد.

قضیه ۸/۳/۲

عملگر خطی T روی یک فضای ضرب داخلی صفر است اگر و تنها اگر

$$\langle a|T|a \rangle = 0$$

برای همه $|a\rangle$ برقرار باشد.

در اثبات قضیه دوم از همانی قطبی‌شدن استفاده می‌شود:

$$\Theta^* \kappa \langle a|T|b \rangle + \Theta \kappa^* \langle b|T|a \rangle = \langle \Theta a + \kappa b|T|\Theta a + \kappa b \rangle - |\Theta|^2 \langle a|T|a \rangle - |\kappa|^2 \langle b|T|b \rangle.$$

با انتخاب Θ, κ مناسب، از این رابطه صفر بودن همه عناصر ماتریسی نتیجه می‌شود.

برای نشان دادن برابری دو عملگر نیز می‌توان آن‌ها را روی یک بردار دلخواه مقایسه کرد یا نشان داد که تفاضلشان عملگر صفر است.

2.3.1 هسته یک نگاشت خطی

از خطی بودن فوراً نتیجه می‌شود که بردار صفر به بردار صفر نگاشته می‌شود. ممکن است بردارهای دیگری نیز به صفر نگاشت شوند.

قضیه ۹/۳/۲ - هسته

مجموعه تمام بردارهای V که تحت $T : V \rightarrow W$ به صفر W نگاشته می‌شوند، یک زیرفضا از V به نام **هسته** یا **فضای پوچ** است و با $\ker T$

نشان داده می‌شود.

بعد $\ker T$ را **پوچی** یا nullity می‌نامیم.

قضیه ۱۰/۳/۲ - برد و رتبه

برد یا دامنه $T(V)$ یک زیرفضا از W است. بعد $T(V)$ را **رتبه** T می‌نامیم.

قضیه ۱۱/۳/۲

یک تبدیل خطی یک‌به‌یک (تزریقی) است اگر و تنها اگر هسته آن فقط بردار صفر باشد.

اثبات. اگر $T|a_1\rangle = T|a_2\rangle$ ، آنگاه

$$T(|a_1\rangle - |a_2\rangle) = 0.$$

□

اگر هسته صفر باشد، $|a_1\rangle = |a_2\rangle$.

قضیه ۱۲/۳/۲

یک نگاشت خطی هم‌متریک، تزریقی است.

قضیه ۱۳/۳/۲ - قضیه بعد

برای نگاشت خطی $T : V \rightarrow W$ در فضای متناهی‌بعد،

$$\dim V = \dim \ker T + \dim T(V).$$

یکی از نتایج آن این است که یک اندومورفیسم در فضای متناهی‌بعدی اگر تزریقی یا پوشا باشد، خودبه‌خود دوسویی است.

گزاره ۱۴/۳/۲

اندومورفیسم یک فضای برداری متناهی‌بعد اگر تزریقی یا پوشا باشد، دوسویی است.

مثال ۱۵/۳/۲ - محاسبه هسته و رتبه

نگاشت

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

را با

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, x_1 - x_3 - 3x_4)$$

در نظر بگیرید. برای هسته باید دستگاه

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$x_1 - x_3 - 3x_4 = 0$$

را حل کنیم. جواب عمومی

$$x_1 = x_3 + 3x_4, \quad x_2 = -3x_3 - 5x_4$$

است؛ بنابراین

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3(1, -3, 1, 0) + x_4(3, -5, 0, 1).$$

پس

$$\dim \ker T = 2.$$

از قضیه بعد،

$$\dim T(V) = 4 - 2 = 2.$$

درواقع هر بردار برد را می‌توان ترکیب خطی دو بردار مستقل $(1, 0, 1)$ و $(0, 1, -1)$ دید.

2.3.2 هم‌ریختی خطی

دو فضای برداری ممکن است از نظر ظاهری متفاوت باشند، اما ساختار خطی یکسانی داشته باشند. برای مثال، $\mathbb{C}$ به‌عنوان فضای حقیقی دوبعدی با $\mathbb{R}^2$ هم‌ریخت است.

تعریف ۱۶/۳/۲ - هم‌ریختی و خودهم‌ریختی

فضای V را با W هم‌ریخت می‌نامیم و می‌نویسیم

$$V \cong W$$

اگر یک نگاشت خطی دوسویی $T: V \rightarrow W$ وجود داشته باشد. چنین T را هم‌ریختی می‌نامیم. اگر نگاشت دوسویی از V به خودش باشد، آن را خودهم‌ریختی یا عملگر خطی وارون‌پذیر می‌نامیم. مجموعه خودهم‌ریختی‌های V با $GL(V)$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱۷/۳/۲

یک هم‌متری از فضای برداری متناهی‌بعدی، خودهم‌ریختی همان فضا است.

برای مثال نگاشت

$$T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x + iy) = (x, y)$$

یک هم‌ریختی خطی میان $\mathbb{C}$ به‌عنوان فضای روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ است. البته این دو فقط به‌عنوان فضاهای برداری یکسان‌اند؛ ساختار جبری کامل آن‌ها یکسان نیست، زیرا در $\mathbb{C}$ ضرب طبیعی میان اعضا وجود دارد ولی در $\mathbb{R}^2$ چنین ضرب طبیعی‌ای نداریم.

قضیه ۱۸/۳/۲

یک نگاشت خطی پوشا $T: V \rightarrow W$ هم‌ریختی است اگر و تنها اگر پوچی آن صفر باشد.

قضیه ۱۹/۳/۲

یک تبدیل خطی تزریقی، مجموعه‌های مستقل خطی را به مجموعه‌های مستقل خطی می‌برد.

قضیه ۲۰/۳/۲

دو فضای برداری متناهی‌بعد دقیقاً زمانی هم‌ریخت‌اند که بعد یکسان داشته باشند.

پس همه فضاهای حقیقی N -بعدی با $\mathbb{R}^N$ و همه فضاهای مختلط N -بعدی با $\mathbb{C}^N$ هم‌ریخت‌اند.

گزاره ۲۱/۳/۲

اگر $V = V_1 \oplus V_2$ باشد، هر خودهم‌ریختی V که یکی از جمع‌های مستقیم را ثابت بگذارد، جمع دیگر را نیز ثابت می‌گذارد.

مثال ۲۲/۳/۲ – اثبات دیگر قضیه بعد

نگاشت

$$\tilde{T} : V / \ker T \rightarrow T(V)$$

را با

$$\tilde{T}([a]) = T|a\rangle$$

تعریف کنید. اگر $[a'] = [a]$ باشد، $a' = a + z$ با $z \in \ker T$ ، بنابراین

$$T(a') = T(a) + T(z) = T(a).$$

پس تعریف خوش‌تعریف است. همچنین $\tilde{T}$ خطی، پوشا و تزریقی است؛ بنابراین

$$V / \ker T \cong T(V).$$

در نتیجه، با استفاده از (۲/۲)، دوباره قضیه بعد به‌دست می‌آید.

قضیه ۲۳/۳/۲

اگر $T : V \rightarrow W$ نگاشتی خطی و U زیرفضایی از V باشد، آنگاه نگاشت

$$\tilde{T} : V/U \rightarrow T(V), \quad \tilde{T}([a]) = T|a\rangle$$

یک هم‌ریختی خوش‌تعریف است.

برای فضاهای مختلط U, V, W نیز نگاشت طبیعی

$$T : (U \oplus V) \otimes W \rightarrow (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$$

که

$$T((|u\rangle + |v\rangle) \otimes |w\rangle) = |u\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w\rangle$$

را به دست می‌دهد، هم‌ریختی است. پس

$$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W). \quad (۱۶.۲)$$

همچنین

$$U \otimes V \cong V \otimes U, \quad (۱۷.۲)$$

و چون $\dim \mathbb{C} = ۱$

$$\mathbb{C} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{C} \cong V, \quad (۱۸.۲)$$

و به‌طور مشابه برای فضای حقیقی

$$\mathbb{R} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{R} \cong V. \quad (19.2)$$

2.4 ساختارهای مختلط

تا اینجا هنگام سخن گفتن از فضای مختلط، میدان اسکالرها را مختلط نگه داشته‌ایم. اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم اگر میدان اسکالر را تغییر دهیم چه ساختارهای جدیدی ممکن است پدید آید. مورد جالب، تبدیل یک فضای حقیقی به ساختاری مختلط است.

در این بخش، برای مدتی کوتاه مثبت‌معین بودن ضرب داخلی را کنار می‌گذاریم تا مفهوم عمومی‌تری داشته باشیم.

جعبه ۱/۴/۲

مگر آنکه خلاف آن تصریح شود، همه ضرب‌های داخلی مختلط هر فیتی و نیمه‌خطی‌اند؛ یعنی مانند تعریف ۱/۲/۲ با مزدوج‌گیری در یکی از آرگومان‌ها تعریف می‌شوند.

تعریف ۲/۴/۲ – ضرب داخلی دوخطی مختلط/حقیقی

فرض کنید F یکی از $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد. یک ضرب داخلی روی فضای خطی V روی F نگاشتی $g: V \times V \rightarrow F$ است که:

(آ) تقارن:

$$g(|a\rangle, |b\rangle) = g(|b\rangle, |a\rangle);$$

(ب) دوخطی بودن:

$$g(|x\rangle, \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha g(|x\rangle, |a\rangle) + \beta g(|x\rangle, |b\rangle),$$

$$g(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, |x\rangle) = \alpha g(|a\rangle, |x\rangle) + \beta g(|b\rangle, |x\rangle);$$

(ج) ناواگرایی:

$$g(|x\rangle, |a\rangle) = 0 \quad \forall |x\rangle \in V \implies |a\rangle = 0.$$

شرط ناواگرایی را می‌توان این‌گونه بازگفت: برای هر بردار ناصفر $|a\rangle$ ، حداقل یک بردار $|x\rangle$ وجود دارد که $g(|x\rangle, |a\rangle) \neq 0$.

در این بخش نمادگذاری دیراک را با زیروند F نشان می‌دهیم:

$$\langle a|b\rangle_F = \langle b|a\rangle_F,$$

$$\langle x|(\alpha a + \beta b)_F = \alpha \langle x|a\rangle_F + \beta \langle x|b\rangle_F,$$

$$(\alpha a + \beta b|x)_F = \alpha \langle a|x\rangle_F + \beta \langle b|x\rangle_F. \quad (20.2)$$

برای $F = \mathbb{R}$ این نمادگذاری همان ضرب داخلی معمول است.

تعریف ۳/۴/۲ – الحاقی، خودالحاقی و پادالحاقی

برای $A \in \text{End}(V)$ ، الحاقی A^T به‌وسیله

$$\langle Aa|b\rangle_F = \langle a|A^T b\rangle_F$$

یا به طور معادل

$$\langle a | A^T b \rangle_F = \langle b | A a \rangle_F$$

تعریف می‌شود. اگر $A^T = A$ باشد، A را **خودالحاقی** و اگر $A^T = -A$ باشد، آن را **پادالحاقی** می‌نامیم.

از تعریف و ناواگرایی،

$$(A^T)^T = A. \quad (21.2)$$

گزاره ۴/۴/۲ – مشخصه پادالحاقی بودن

عملگر $A \in \text{End}(V)$ پادالحاقی است اگر و تنها اگر

$$\langle x | A x \rangle_F = 0 \quad \text{برای همه } x \in V.$$

اثبات. اگر A پادالحاقی باشد، یعنی $A^T = -A$ ، آنگاه

$$\langle x | A x \rangle_F = \langle x | A^T x \rangle_F = -\langle x | A x \rangle_F,$$

و بنابراین

$$\langle x | A x \rangle_F = 0.$$

برعکس، فرض کنید $\langle x | A x \rangle_F = 0$ برای همه $x \in V$ برقرار باشد. برای دو اسکالر ناصفر $\alpha, \beta \in F$ و دو بردار ناصفر $|a\rangle, |b\rangle \in V$ داریم

$$0 = \langle \alpha a + \beta b | A(\alpha a + \beta b) \rangle_F.$$

با استفاده از دوخطی بودن و فرض، جمله‌های قطری صفر می‌شوند و می‌ماند:

$$0 = \alpha \beta (\langle a | A b \rangle_F + \langle b | A a \rangle_F).$$

با تعریف الحاقی،

$$\langle b | A a \rangle_F = \langle A^T b | a \rangle_F = \langle b | A^T a \rangle_F,$$

و در نتیجه

$$\langle b | (A + A^T) a \rangle_F = 0$$

برای همه $|a\rangle, |b\rangle$ برقرار است. از ناواگرایی ضرب داخلی نتیجه می‌شود

$$(A + A^T)|a\rangle = 0 \quad \forall |a\rangle,$$

□

پس $A^T = -A$ و A پادالحاقی است.

مقایسه این گزاره با قضیه ۸/۳/۲ نشان می‌دهد که مثبت‌معین بودن ضرب داخلی چه محدودیت نیرومندی بر چنین ساختاری تحمیل می‌کند.

تعریف ۵/۴/۲ – ساختار مختلط

یک **ساختار مختلط** J روی یک فضای برداری حقیقی V ، عملگری خطی است که

$$J^2 = -1, \quad \langle J a | J b \rangle = \langle a | b \rangle$$

برای همه $|a\rangle, |b\rangle \in V$ برقرار باشد.

گزاره ۶/۴/۲ – پادالحاقی بودن ساختار مختلط

ساختار مختلط J پادالحاقی است.

اثبات. بردار دلخواه $a \in V$ را بگیرید و قرار دهید $|b\rangle = J|a\rangle$. چون در فضای حقیقی داریم $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \cdot | \cdot \rangle$ ، از یک سو

$$\langle a | Ja \rangle = \langle a | b \rangle = \langle Ja | Jb \rangle = \langle Ja | J^2 a \rangle = -\langle Ja | a \rangle.$$

از سوی دیگر، با تقارن ضرب داخلی،

$$\langle a | Ja \rangle = \langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle = \langle Ja | a \rangle.$$

پس

$$\langle a | Ja \rangle = 0 \quad \forall |a\rangle \in V.$$

□

طبق گزاره ۴/۴/۲، J پادالحاقی است.

اکنون فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی N -بعدی باشد. یک بردار ناصفر دلخواه را نرمال می‌کنیم و آن را $|e_1\rangle$ می‌نامیم. طبق گزاره‌های ۴/۴/۲ و ۶/۴/۲، بردار $|e_1\rangle$ بر $|e_1\rangle$ عمود است؛ پس با نرمال کردن آن، $|e_2\rangle$ را به دست می‌آوریم. اگر $N > 2$ باشد، $|e_3\rangle$ را یک بردار یکه دلخواه عمود بر $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $|a_3\rangle = J|e_3\rangle$. روشن است که $|a_3\rangle$ بر $|e_3\rangle$ عمود است. افزون بر این،

$$\langle e_1 | a_3 \rangle = \langle Je_1 | Ja_3 \rangle = \langle Je_1 | J^2 e_3 \rangle = -\langle Je_1 | e_3 \rangle = -\langle e_2 | e_3 \rangle = 0,$$

و نیز

$$\langle e_2 | a_3 \rangle = \langle Je_2 | Je_3 \rangle = \langle e_1 | e_3 \rangle = 0.$$

با ادامه این فرایند به قضیه زیر می‌رسیم.

قضیه ۷/۴/۲

اگر $N = 2m$ باشد، مجموعه

$$\{|e_i\rangle, J|e_i\rangle\}_{i=1}^m$$

یک پایه متعامدهنجار برای فضای برداری حقیقی V با ضرب داخلی $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \cdot | \cdot \rangle$ می‌سازد. بنابراین برای اینکه یک فضای حقیقی دارای ساختار مختلط J باشد، بعد آن باید زوج باشد.

تعریف ۸/۴/۲ – مختلط‌سازی

اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد، $\mathbb{C} \otimes V$ را با قانون ضرب اسکالر

$$\alpha(\beta \otimes |a\rangle) = (\alpha\beta) \otimes |a\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

به یک فضای برداری مختلط تبدیل می‌کنیم. این فضا را **مختلط‌سازی** V می‌نامیم و با $V^{\mathbb{C}}$ نمایش می‌دهیم. به‌ویژه

$$(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n.$$

توجه کنید که

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V, \quad \dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} V.$$

اگر $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ پایه V باشد، همین مجموعه یک پایه $V^{\mathbb{C}}$ به‌عنوان فضای برداری مختلط است، در حالی که

$$\{|a_k\rangle, i|a_k\rangle\}_{k=1}^N$$

یک پایه $V^{\mathbb{C}}$ به‌عنوان فضای برداری حقیقی است.

اگر روی V ضرب داخلی حقیقی $\langle a|b \rangle_{\mathbb{R}} = \langle a|b \rangle$ داشته باشیم، پس از مختلط‌سازی می‌توان ضرب داخلی هرفیتی را به صورت

$$\langle \alpha \otimes a | \beta \otimes b \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle a|b \rangle$$

تعریف کرد. اثبات اینکه این تعریف همه خواص تعریف $1/2/2$ را دارد به خواننده واگذار می‌شود. به تعبیر مفهومی، برای مختلط‌سازی فضای حقیقی V ، آن را در مجموعه اعداد مختلط «ضرب» می‌کنیم:

$$V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V.$$

نتیجه، یک فضای حقیقی با دو برابر بعد اولیه است. اکنون می‌توان پرسید آیا فرایند معکوسی، یعنی نوعی «تقسیم» یک فضای حقیقی با بعد زوج، وجود دارد تا فضای مختلطی با نصف آن بعد به دست آوریم؟

فرض کنید V یک فضای حقیقی $2m$ -بعدی باشد و J روی آن ساختار مختلط باشد. پایه $\{|e_i\rangle, J|e_i\rangle\}_{i=1}^m$ را در نظر بگیرید و زیرفضای

$$V_1 = \text{Span}\{|e_i\rangle\}_{i=1}^m$$

را تعریف کنید. روی V_1 ضرب اسکالر مختلط را با رابطه

$$(\alpha + i\kappa)|v_1\rangle = (\alpha + \kappa J)|v_1\rangle, \quad \alpha, \kappa \in \mathbb{R}, \quad |v_1\rangle \in V_1, \quad (22.2)$$

تعریف می‌کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که این فرایند، فضای حقیقی $2m$ -بعدی V را به فضای برداری مختلط m -بعدی $V_1^{\mathbb{C}}$ تبدیل می‌کند.

2.5 تابع‌های خطی و فضای دوگان

وقتی فضای مقصد یک نگاشت خطی مجموعه اسکالرها، یعنی $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد، آن نگاشت را **تابع خطی** یا **فانکشنال خطی** می‌نامیم. مجموعه فانکشنال‌های خطی $V \rightarrow \mathbb{C}$ را با

$$V^*$$

نشان می‌دهیم و آن را **فضای دوگان** V می‌نامیم.

مثال ۱/۵/۲ – نمونه‌هایی از فانکشنال خطی

۱. اگر $|a\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ باشد،

$$\phi(|a\rangle) = \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

یک فانکشنال خطی است.

۲. اگر $M = (\mu_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ باشد،

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_{ij}$$

فانکشنال خطی است.

۳. برای ماتریس $n \times n$ ،

$$\theta(M) = \sum_{j=1}^n \mu_{jj} = \text{tr } M$$

خطی است.

۴. عملگر

$$\text{int}(f) = \int_a^b f(t) dt$$

روی فضای توابع پیوسته یک فانکشنال خطی است.

۵. اگر V فضای ضرب داخلی مختلط باشد و $|a\rangle$ ثابت،

$$\gamma_a(|b\rangle) = \langle a|b\rangle$$

یک فانکشنال خطی است.

۶. اگر $\{|a_k\rangle\}$ و $\{\phi_k\}$ مجموعه‌های متناهی باشند، آنگاه

$$A = \sum_{k=1}^m |a_k\rangle \langle \phi_k|$$

یک عملگر خطی است و

$$A|x\rangle = \sum_{k=1}^m \phi_k(|x\rangle) |a_k\rangle.$$

فرض کنید V یک فضای N -بعدی با پایه

$$B = \{|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$$

باشد. برای هر مجموعه اسکالرهای $\{\Theta_1, \dots, \Theta_N\}$ یک فانکشنال یکتا ϕ_Θ تعریف می‌کنیم به طوری که

$$\phi_\Theta(|a_i\rangle) = \Theta_i.$$

اگر

$$|b\rangle = \sum_{i=1}^N \kappa_i |a_i\rangle,$$

آنگاه

$$\phi_\Theta(|b\rangle) = \sum_{i=1}^N \kappa_i \Theta_i. \quad (23.2)$$

این دقیقاً شبیه ضرب یک بردار سطری در یک بردار ستونی است.

اکنون فانکشنال‌های ویژه $\phi_1, \dots, \phi_N$ را تعریف می‌کنیم که

$$\phi_i(|a_j\rangle) = \delta_{ij}. \quad (24.2)$$

قضیه ۲/۵/۲ – پایه دوگان

برای هر پایه $B = \{|a_j\rangle\}_{j=1}^N$ در V ، پایه یکتایی

$$B^* = \{\phi_i\}_{i=1}^N$$

در V^* وجود دارد که

$$\phi_i(|a_j\rangle) = \delta_{ij}.$$

به B^* ، پایه دوگان B می‌گوییم. در نتیجه

$$\dim V^* = \dim V = N.$$

هر بردار $|a\rangle$ نیز در این چارچوب به یک فانکشنال دوگان متناظر می‌شود که بر اساس مؤلفه‌های $|a\rangle$ در پایه B ساخته می‌شود.

تعریف ۳/۵/۲ – نابودگریک نابودگر بردار $|a\rangle \in V$ فانکشنال خطی $\phi \in V^*$ است که

$$\phi(|a\rangle) = 0.$$

اگر W زیرفضایی از V باشد، مجموعه فانکشنال‌هایی که همه بردارهای W را به صفر می‌فرستند با W° نشان داده می‌شود.

اگر $\dim W = k$ و پایه W را تا پایه V گسترش دهیم، آنگاه

$$\dim V = \dim W + \dim W^\circ. \quad (25.2)$$

تعریف ۴/۵/۲ – دوگان یا پس‌کش یک تبدیل خطیاگر $T : V \rightarrow U$ نگاشت خطی باشد، نگاشت

$$T^* : U^* \rightarrow V^*$$

را با رابطه

$$(T^*\gamma)(|a\rangle) = \gamma(T|a\rangle) \quad \forall |a\rangle \in V$$

تعریف می‌کنیم. این T^* را دوگان یا پس‌کش T می‌نامیم.می‌توان نشان داد T^* خطی است. همچنین

$$\ker T^* = T(V)^\circ.$$

پس اگر T پوشا باشد، T^* تزریقی است؛ و اگر T تزریقی باشد، T^* پوشاست. در حالت دوسویی، T^* نیز هم‌ریختی است.

گزاره ۵/۵/۲برای تبدیل خطی T

$$\ker T^* = T(V)^\circ.$$

اگر T پوشا باشد، T^* تزریقی است و اگر T تزریقی باشد، T^* پوشا است. به‌ویژه اگر T هم‌ریختی باشد، T^* نیز هم‌ریختی است.

دوگان و ضرب داخلی

اگر

$$\Theta_i = \langle a | a_i \rangle$$

باشند، این اسکالرهای یک فانکشنال یکتا γ_a تعریف می‌کنند. طبیعی است که آن را با $\langle a|$ شناسایی کنیم. بنابراین عملگر دوگان‌سازی بردار را به صورت

$$|a\rangle \mapsto \langle a|$$

نشان می‌دهیم و نماد

$$|a\rangle^\dagger = \langle a| \quad (26.2)$$

را به کار می‌بریم.

اگر

$$|c\rangle = \Theta|a\rangle + \kappa|b\rangle,$$

آنگاه

$$(\Theta|a\rangle + \kappa|b\rangle)^\dagger = \Theta^*\langle a| + \kappa^*\langle b|. \quad (27.2)$$

بنابراین این رابطه در اسکالرهای نیمه‌خطی است: ضرایب مختلط مزدوج می‌شوند.

اگر

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{pmatrix},$$

آن‌گاه

$$\langle a| = (\Theta_1^* \quad \Theta_2^* \quad \cdots \quad \Theta_n^*), \quad (28.2)$$

و در نتیجه

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^n \Theta_i^* \kappa_i.$$

2.6 نگاشت‌های چندخطی

برای مطالعهٔ تانسورها و دترمینان‌ها، تعمیم بسیار سودمندی از فانکشنال‌های خطی لازم است.

تعریف ۱/۶/۲ – نگاشت p -خطی

اگر V^p حاصل ضرب p نسخه از V باشد، نگاشت

$$\theta : V^p \rightarrow U$$

را p -خطی می‌نامیم اگر نسبت به هر آرگومان جداگانه خطی باشد؛ یعنی

$$\theta(a_1, \dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots, a_p) = \alpha \theta(a_1, \dots, a_j, \dots, a_p) + \beta \theta(a_1, \dots, b_j, \dots, a_p).$$

اگر فضای مقصد $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد، آن را یک تابع p -خطی می‌نامیم.

اگر $\phi_1, \dots, \phi_p$ فانکشنال‌های خطی باشند،

$$\theta(a_1, \dots, a_p) = \phi_1(a_1) \cdots \phi_p(a_p)$$

یک تابع p -خطی است.

اگر π جایگشتی از $1, 2, \dots, p$ باشد، با جایگشت آرگومان‌ها نگاشت $\pi\omega$ را تعریف می‌کنیم:

$$(\pi\omega)(a_1, \dots, a_p) = \omega(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(p)}).$$

تعریف ۲/۶/۲ - نگاشت پادمتقارن

نگاشت p -خطی ω را پادمتقارن می‌نامیم اگر

$$\omega(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(p)}) = \text{sgn}(\pi)\omega(a_1, \dots, a_p)$$

برای هر جایگشت π برقرار باشد؛ در اینجا

$$\text{sgn}(\pi) = +1$$

برای جایگشت زوج و

$$\text{sgn}(\pi) = -1$$

برای جایگشت فرد است. مجموعه نگاشت‌های پادمتقارن p -خطی را با $\Lambda^p(V, U)$ و توابع پادمتقارن را با $\Lambda^p(V)$ نشان می‌دهیم.

علامت جایگشت را گاهی با نماد

$$\text{sgn}(\pi) = \text{sgn}(\pi(1)\pi(2) \cdots \pi(p)) = (i_1 i_2 \cdots i_p) \quad (29.2)$$

می‌نویسند که در آن $i_k = \pi(k)$.

هر تابع چندخطی را می‌توان به یک تابع پادمتقارن تبدیل کرد. اگر θ چندخطی باشد، تعریف

$$\omega = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \pi\theta \quad (30.2)$$

یک تابع پادمتقارن می‌دهد.

قضیه ۳/۶/۲

برای $\omega \in \Lambda^p(V, U)$ گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. اگر دو آرگومان برابر باشند، ω صفر است.

۲. برای هر جایگشت π ,

$$\omega(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(p)}) = \text{sgn}(\pi)\omega(a_1, \dots, a_p).$$

۳. اگر $\{a_k\}_{k=1}^p$ مستقل خطی نباشند، آنگاه

$$\omega(a_1, \dots, a_p) = 0.$$

گزاره ۴/۶/۲

اگر $N = \dim V$ و $\omega \in \Omega^N(V, U)$ باشد، آنگاه ω به‌طور یکتا با مقدارش روی یک پایه تعیین می‌شود. اگر روی یک پایه صفر باشد، خود نگاشت یکساناً صفر است.

دلیل. اگر $\{|e_i\rangle\}$ پایه باشد و

$$|a_j\rangle = \sum_{k=1}^N \Theta_{jk} |e_k\rangle,$$

از چندخطی بودن و پادمتقارن بودن، فقط جمله‌هایی باقی می‌مانند که اندیس‌ها یک جایگشت کامل از $1, \dots, N$ باشند. در نتیجه کل مقدار $\omega(a_1, \dots, a_N)$ ضربی ثابت از مقدار $\omega(e_1, \dots, e_N)$ است.

تعریف ۵/۶/۲ - تابع دترمینان

یک تابع N -خطی پادمتقارن روی فضای N -بعدی V را **تابع دترمینان** در V می‌نامیم.

فرض کنید $B = \{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ پایه V و $B^* = \{\phi_j\}_{j=1}^N$ پایهٔ دوگان آن باشد. تابع چندخطی

$$\theta(a_1, \dots, a_N) = \phi_1(a_1) \cdots \phi_N(a_N)$$

را در نظر بگیرید. پادمتقارن‌سازی آن

$$\Delta = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \pi \theta$$

یک تابع دترمینان است و

$$\Delta(e_1, \dots, e_N) = 1.$$

پس:

جعبه ۶/۶/۲

در هر فضای برداری متناهی‌بعد، تابع‌های دترمینانی وجود دارند که یکساناً صفر نیستند.

گزاره ۷/۶/۲

اگر $\omega \in \Omega^N(V, U)$ و Δ یک تابع دترمینان ناصفر ثابت در V باشد، آنگاه بردار یکتایی $|u_*\rangle \in U$ وجود دارد که

$$\omega(v_1, \dots, v_N) = \Delta(v_1, \dots, v_N) |u_*\rangle.$$

نتیجه ۸/۶/۲

هر تابع دترمینان، مضربی اسکالر از یک تابع دترمینان ناصفر ثابت است.

گزاره ۹/۶/۲

اگر Δ یک تابع دترمینان در فضای N -بعدی V و $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^N$ بردارهای V باشند، آنگاه

$$\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \Delta(v, v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_N) |v_j\rangle = \Delta(v_1, \dots, v_N) |v\rangle.$$

علامت کلاه به معنای حذف آن بردار است.

2.6.1 دترمینان یک عملگر خطی

فرض کنید A یک عملگر خطی روی فضای N -بعدی V باشد و Δ یک تابع دترمینان ناصفر انتخاب کنیم. تابع

$$\Delta_A(v_1, \dots, v_N) = \Delta(Av_1, \dots, Av_N) \quad (31.2)$$

نیز یک تابع دترمینان است. پس با توجه به یکتایی تا یک ضرب اسکالر، عدد $\det A$ وجود دارد که

$$\Delta_A = (\det A) \Delta. \quad (۳۲.۲)$$

این عدد به انتخاب تابع دترمینان یا پایه وابسته نیست و **دترمینان عملگر** A نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰/۶/۲ – دترمینان یک عملگر خطی

فرض کنید $A \in \text{End}(V)$ باشد و Δ یک تابع دترمینان ناصفر روی V باشد. اگر Δ_A مطابق رابطه (۳۱/۲) تعریف شده باشد، آنگاه رابطه

$$\Delta_A = (\det A) \Delta \quad (۳۲.۲)$$

دترمینان عملگر A را تعریف می‌کند. عدد $\det A$ فقط به خود A وابسته است و به انتخاب تابع دترمینان ناصفر یا پایه وابسته نیست.

قضیه ۱۱/۶/۲ – خواص دترمینان

برای عملگر خطی A :

۱. اگر $A = \alpha \mathbf{1}$ باشد،

$$\det A = \alpha^N.$$

۲. A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$\det A \neq 0.$$

۳.

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

2.6.2 الحاقی کلاسیک

برای $|v\rangle, |v_i\rangle \in V$ نگاشت

$$\Phi(v_1, \dots, v_N)|v\rangle = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \Delta(v, Av_1, \dots, \widehat{Av_j}, \dots, Av_N)|v_j\rangle$$

را در نظر بگیرید. این نگاشت پادمتقارن است؛ بنابراین طبق گزاره ۷/۶/۲، یک عملگر خطی یکتای $\text{ad}(A)$ وجود دارد که

$$\Phi(v_1, \dots, v_N)|v\rangle = \Delta(v_1, \dots, v_N) \text{ad}(A)|v\rangle.$$

یعنی

$$\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \Delta(v, Av_1, \dots, \widehat{Av_j}, \dots, Av_N)|v_j\rangle = \Delta(v_1, \dots, v_N) \text{ad}(A)|v\rangle. \quad (۳۳.۲)$$

این عملگر را **الحاقی کلاسیک** A می‌نامیم.

گزاره ۱۲/۶/۲

الحاقی کلاسیک ارضا می‌کند:

$$\text{ad}(A)A = (\det A)\mathbf{1} = A \text{ad}(A). \quad (۳۴.۲)$$

با جایگذاری $A|v\rangle$ به جای $|v\rangle$ در $(۳۳/۲)$ و استفاده از گزاره $۹/۶/۲$ ، رابطه اول نتیجه می‌شود. با اعمال A بر $(۳۳/۲)$ رابطه دوم به دست می‌آید.

نتیجه ۱۳/۶/۲

اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه A وارون‌پذیر است و

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{ad}(A).$$

2.7 مسائل

۱.۲: $\mathbb{R}_+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. «جمع» دو عضو $\mathbb{R}_+$ را برابر حاصل ضرب معمول آن‌ها و ضرب اسکالر $r \cdot p$ را برابر p^r تعریف کنید. نشان دهید با این اعمال، $\mathbb{R}_+$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

۲.۲: نشان دهید اشتراک دو فضای زیرین، خود یک فضای زیرین است.

۳.۲: برای هر زیرمجموعه زیر از $\mathbb{R}^3$ مشخص کنید که آیا زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است یا نه:

(آ) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$

(ب) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 3\}$

(ج) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$

۴.۲: ثابت کنید مؤلفه‌های یک بردار در یک پایه معین یکتا هستند.

۵.۲: نشان دهید بردارهای زیر یک پایه برای $\mathbb{C}^n$ (یا $\mathbb{R}^n$) می‌سازند:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |a_n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

۶.۲: قضیه $۶/۱/۲$ را اثبات کنید.

۷.۲: W زیرفضایی از $\mathbb{R}^5$ است که با روابط

$$x_1 = 3x_2 + x_3, \quad x_2 = x_5, \quad x_4 = 2x_3$$

تعریف شده است. یک پایه برای W بیابید.

۸.۲: اگر U_1, U_2 زیرفضاهای V باشند، نشان دهید:

(آ)

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2);$$

(ب) اگر $U_1 + U_2 = V$ و $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$ ، آنگاه $V = U_1 \oplus U_2$ ؛

(ج) اگر $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$ ، آنگاه $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

۹.۲: نشان دهید بردارهای تعریف‌شده در رابطه $(۵/۲)$ ، جمع $W = U \oplus V$ را می‌پوشانند.

۱۰.۲: نشان دهید ضرب داخلی هر بردار با $|\mathbf{0}\rangle$ صفر است.

۱۱.۲: اعداد $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$ را بیابید به طوری که چندجمله‌ای‌های $a_0 + b_1 t$ و $b_0 + c_1 t + c_2 t^2$ در بازه $[0, 1]$ متعامد هنجار باشند، وقتی ضرب داخلی مطابق مثال ۳/۲/۲ با $w(t) = 1$ تعریف شده است.

۱۲.۲: با استفاده از فرایند گرام-اشمیت، برای بردارهای مستقل خطی $x(t) = t^n$ چندجمله‌ای‌های متعامد هنجار $e_0(t), e_1(t), e_2(t)$ را در دو حالت زیر بیابید:

(I)

$$\langle x|y\rangle = \int_{-1}^1 x^*(t)y(t) dt;$$

(ب)

$$\langle x|y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} x^*(t)y(t) dt.$$

از نتیجه انتگرال‌های گاوسی برای حل بخش دوم استفاده کنید. می‌توانید از رابطه

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n dt = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n = 0, \\ 0, & n \text{ فرد است}, \\ \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2^{n/2}}, & n \text{ زوج است} \end{cases}$$

استفاده کنید.

۱۳.۲: (I) با فرایند گرام-اشمیت، از بردارهای $(1, -1, 1)$ ، $(-1, 0, 1)$ و $(2, -1, 2)$ یک مجموعه متعامد هنجار بسازید.

(ب) آیا این سه بردار مستقل خطی‌اند؟ اگر نه، با استفاده از بخش (الف) یک ترکیب خطی صفر بیابید.

۱۴.۲: (I) از بردارهای $(1, -1, 2)$ ، $(-2, 1, -1)$ و $(-1, -1, 4)$ با گرام-اشمیت یک مجموعه متعامد هنجار بسازید.

(ب) مستقل خطی بودن آن‌ها را بررسی کنید و، در صورت وابستگی، یک ترکیب خطی صفر بیابید.

۱۵.۲: با تعریف یک ضرب داخلی مناسب و استفاده از نابرابری شوارتس، نامساوی انتگرالی متناظر را اثبات کنید.

۱۶.۲: مشابه مسئله قبل، برای عبارت‌های چندجمله‌ای و وزن گاوسی یک نامساوی از نوع شوارتس به دست آورید.

۱۷.۲: نشان دهید برای هر مجموعه از n عدد مختلط $\theta_1, \dots, \theta_n$ داریم

$$|\theta_1 + \dots + \theta_n|^2 \leq n(|\theta_1|^2 + \dots + |\theta_n|^2).$$

راهنما: نابرابری شوارتس را روی $(1, 1, \dots, 1)$ و $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ اعمال کنید.

۱۸.۲: با استفاده از نابرابری شوارتس نشان دهید اگر $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{\kappa_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $\mathbb{C}^{\infty}$ باشند، سری

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i^* \kappa_i$$

همگراست.

۱۹.۲: نشان دهید

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x^2 + y^2, x + y, 2x - y)$$

نگاشت خطی نیست.

۲۰.۲: خطی بودن همهٔ تبدیل‌های مثال ۵/۳/۲ را بررسی کنید.

۲۱.۲: اگر جایگشت π جایگشت $(1, 2, 3) \mapsto (3, 1, 2)$ باشد، $A_\pi|e_i\rangle$ را برای $i = 1, 2, 3$ در پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^3$ (یا $\mathbb{C}^3$) بیابید.

۲۲.۲: نشان دهید اگر $T \in L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ باشد، اسکالر $\Theta \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$T|a\rangle = \Theta|a\rangle$$

برای همهٔ $|a\rangle \in \mathbb{C}$ برقرار باشد.

۲۳.۲: اگر $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^n$ فضای V را بیوشانند و $T \in L(V, W)$ باشد، نشان دهید $\{T|a_i\rangle\}$ فضای $T(V)$ را می‌پوشانند. به‌طور خاص اگر T پوشا باشد، این بردارها W را می‌پوشانند.

۲۴.۲: مثالی از تابعی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ بیابید که

$$f(\Theta a) = \Theta f(a) \quad (\Theta \in \mathbb{R})$$

ولی خطی نباشد. راهنما: یک تابع همگن درجهٔ یک در نظر بگیرید.

۲۵.۲: تبدیل‌های زیر را خطی بودن بررسی کنید:

(آ) فضای $V = \mathbb{C}$ روی اعداد حقیقی و $C(z) = z^*$. آیا اگر اسکالرها مختلط باشند، این نگاشت هنوز خطی است؟

(ب) در $P_c[t]$ عملگر T با

$$T|x(t)\rangle = |x(t+1)\rangle - |x(t)\rangle$$

تعریف شده است.

۲۶.۲: ثابت کنید هستهٔ تبدیل $T: V \rightarrow W$ زیرفضایی از V و $T(V)$ زیرفضایی از W است.**۲۷.۲: اگر V, W متناهی‌بعد باشند و $T \in L(V, W)$ پوشا باشد، نشان دهید**

$$\dim W \leq \dim V.$$

۲۸.۲: فرض کنید V متناهی‌بعد و $T \in L(V, W)$ ناصفر است. ثابت کنید زیرفضایی U از V وجود دارد که

$$\ker T \cap U = \{0\}, \quad T(V) = T(U).$$

۲۹.۲: با استفاده از قضیهٔ ۱۱/۳/۲، قضیهٔ ۱۸/۳/۲ را اثبات کنید.**۳۰.۲: با استفاده از قضیهٔ ۱۱/۳/۲، قضیهٔ ۱۹/۳/۲ را اثبات کنید.**

۳۱.۲: برای پایه‌های $B_V = \{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$ و $B_W = \{|b_i\rangle\}_{i=1}^N$ نگاشت $B_W = \{|b_i\rangle\}_{i=1}^N$ را $T|a_i\rangle = |b_i\rangle$ تعریف کنید و با نشان دادن اینکه T یک هم‌ریختی است، قضیهٔ ۲۰/۳/۲ را اثبات کنید.

۳۲.۲: نشان دهید برای الحاقی تعریف ۳/۴/۲ داریم

$$(A^T)^T = A.$$

۳۳.۲: نشان دهید W° زیرفضایی از V^* است و

$$\dim V = \dim W + \dim W^\circ.$$

۳۴.۲: نشان دهید هر بردار در فضای N -بعدی V^* دارای $N - 1$ نابودگر مستقل خطی است؛ به بیان دیگر، یک فانکشنال خطی دست‌کم $N - 1$ بردار مستقل خطی را به صفر می‌فرستد.

۳۵.۲: نشان دهید T و T^* رتبه یکسان دارند. به‌ویژه اگر T تزریقی باشد، T^* پوشاست. راهنما: از قضیه بعد برای T و T^* و رابطه $(۲۵/۲)$ استفاده کنید.

۳۶.۲: قضیه $۳/۶/۲$ را اثبات کنید.

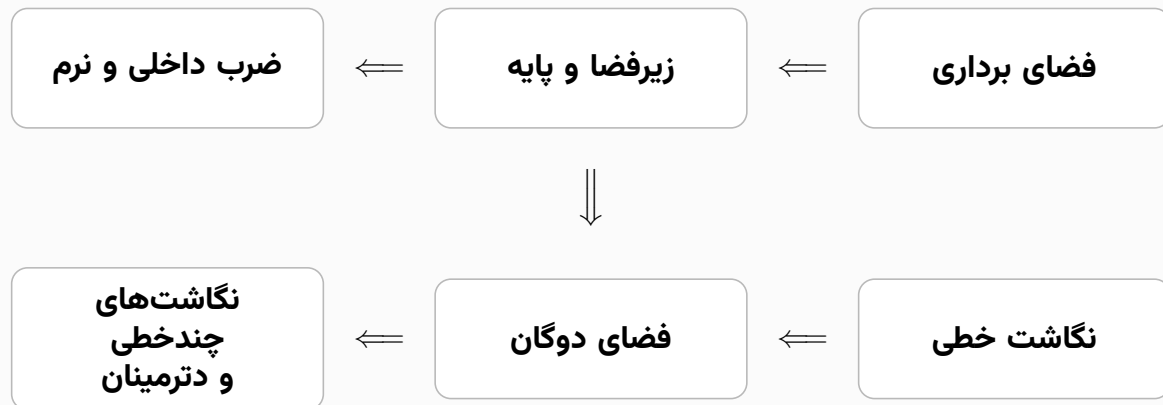
۳۷.۲: گزاره $۹/۶/۲$ را اثبات کنید. راهنما: ابتدا نشان دهید اگر $\{v_k\}$ مستقل خطی نباشند، هر دو طرف صفر می‌شوند. سپس در حالت استقلال خطی، آن‌ها را پایه بگیرید، v را برحسب آن‌ها بنویسید و از پادمتقارن بودن استفاده کنید.

۳۸.۲: قضیه $۱۱/۶/۲$ را اثبات کنید. راهنما: برای بخش دوم از این واقعیت استفاده کنید که عملگر وارون‌پذیر مجموعه‌های مستقل خطی را به مجموعه‌های مستقل خطی می‌برد.

جمع‌بندی مفهومی فصل

نقشهٔ راه فصل

در این فصل زنجیره‌ای از ساختارها را به صورت زیر دیدیم. نکتهٔ مهم این است که هر مرحله، ساختار بیشتری به مفهوم «بردار» می‌افزاید و در عین حال ابزارهای جدیدی برای فیزیک فراهم می‌کند: متعامدسازی برای انتخاب پایه‌های مناسب، نابرابری شوارتس برای کنترل اندازهٔ ضرب‌های داخلی، هسته و رتبه برای فهم اطلاعاتی که یک تبدیل خطی حفظ یا حذف می‌کند، فضای دوگان برای ساخت فانکشنال‌ها و در نهایت دترمینان برای مطالعهٔ وارون‌پذیری عملگرها.



هر ساختار، زمینه را برای ساختار بعدی فراهم می‌کند.