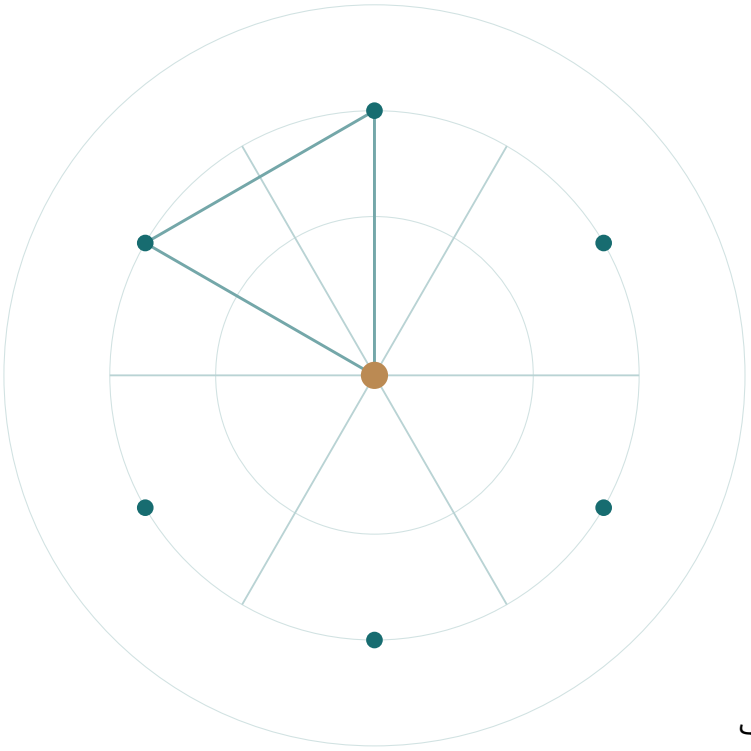
جزوهٔ آموزشی درس نظریهٔ گروه در فیزیک

فصل اول

مبانی نظریهٔ گروه‌ها و نظریهٔ بازنمایی

از تقارن‌های متناهی تا بازنمایی‌های کوانتومی



نویسنده و تدوین‌گر نسخهٔ آموزشی

دکتر اباصلت رستمی

گروه فیزیک ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

ترجمه و بازنویسیِ آموزشی بر اساس فصل نخستِ کتاب

Continuous Groups for Physicists

ویرایش آموزشی مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

فصل اول: مبانی نظریهٔ گروه‌ها و نظریهٔ بازنمایی

مبانی و ساختار گروه‌ها

بخش‌های ۱.۱ تا ۵.۱

1.1	تعریف گروه	۳
1.2	چند نمونهٔ مهم	۴
1.3	عملیات درون یک گروه	۵
1.4	روابط میان گروه‌ها و روش‌های ترکیب آن‌ها	۸
1.5	تحقق‌های یک گروه و عمل گروهی	۹

ساختار خطی و بازنمایی‌ها

بخش‌های ۶.۱ تا ۱۲.۱

1.6	بازنمایی‌های گروه	۱۱
1.7	بازنمایی‌های معادل	۱۲
1.8	بازنمایی‌های یکانی و متعامد	۱۲
1.9	ماتریس‌های یک بازنمایی	۱۳
1.10	عملیات روی بازنمایی‌ها	۱۴
1.11	کاراکترِ بازنمایی	۱۵
1.12	زیرفضاهای ناوردا؛ تحویل‌پذیری و تحویل‌ناپذیری	۱۵

لم شور، تجزیه و جبر گروه

بخش‌های ۱۳.۱ تا ۱۵.۱

1.13	لم شور: اثبات و کاربردهای بنیادی	۱۷
1.14	جبر گروه	۲۳
1.15	بازنمایی‌های گروه و مدول‌های جبر گروه	۲۴

ضمیمه‌های آموزشی

مسائل، واژه‌نامه و منابع

—	مسائل پایان فصلِ کتاب و حل تشریحی آن‌ها	۲۶
—	چالش‌های تکمیلیِ محاسباتی	۲۸
—	واژه‌نامهٔ بسیار کوتاه	۳۰
—	منابع و یادداشت دربارهٔ متن	۳۰

در نسخهٔ دیجیتال، عنوان‌ها کلیک‌پذیرند و زیربخش‌ها از نشانک‌های سند در دسترس‌اند.

پیشگفتار فصل اول

هدف این فصل، ساختن زبانی دقیق برای بیان «تقارن» است. گروه‌ها ابتدا به‌صورت مجموعه‌هایی مجهز به یک قانون ترکیب معرفی می‌شوند؛ اما آنچه برای یک فیزیک‌دان حیاتی است، تبدیلِ عناصر مجرد به عملگرها و ماتریس‌هایی است که بر حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها اثر می‌گذارند. در ادامه خواهیم دید چگونه ردِ یک ماتریس، بی‌آنکه لازم باشد همهٔ درایه‌های آن را بشناسیم، اطلاعاتی عمیق دربارهٔ بازنمایی به ما می‌دهد.

پیش‌نیازها: نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها، فضاهای برداری حقیقی و مختلط، تبدیلات خطی، ضرب داخلی، رد و دترمینان ماتریس. هرجا به نکته‌ای فنی‌تر نیاز باشد، آن را در مثال‌ها توضیح می‌دهیم.

۱.۱ تعریف گروه

یک گروه مجموعه‌ای ناتهی مانند $G = \{a, b, c, \dots, e, \dots\}$ به‌همراه یک عمل دوتاییِ مشخص است؛ این عمل را، حتی اگر ضربِ عددی نباشد، به‌اختصار با کنار هم نوشتن دو عنصر نمایش می‌دهیم. چهار اصل لازم‌اند:

(i) بسته‌بودن: اگر $a, b \in G$، آنگاه ab دقیقاً یک عضو از G است.

(ii) شرکت‌پذیری: برای هر سه عضو، $a(bc) = (ab)c$. این اصل با جابه‌جایی $ab = ba$ فرق دارد.

(iii) عضو همانی: عضوی یکتا به نام e وجود دارد که $ae = ea = a$ برای تمام aها.

(iv) عضو وارون: هر a عضو وارون یکتای a^{-1} دارد و $a a^{-1} = a^{-1} a = e$.

به این اصول اصول موضوعهٔ گروه می‌گوییم. گاهی می‌توان فرض‌های ظاهراً ضعیف‌تری مانند وجود همانیِ چپ و وارونِ چپ را بیان کرد و سپس شرط‌های دوطرفه را نتیجه گرفت؛ اثباتِ آن در بخش مسائل انتهایی آمده است.

اگر تعداد اعضای گروه محدود باشد، G را متناهی می‌گوییم و $|G|$ را مرتبهٔ گروه می‌نامیم. گروه‌های نامتناهی ممکن است گسسته، مانند $(\mathbb{Z}, +)$، یا پیوسته و دارای ساختار منیفلد باشند، مانند گروه دوران‌های صفحه.

مثال حل‌شده: گروهی که «شبیه جمع» است ولی جابه‌جایی ندارد

مجموعهٔ تبدیل‌های $T_{a,b}(x) = ax + b$ با $a \neq 0$ را در نظر بگیرید. باید بررسی کنیم تحت ترکیب توابع یک گروه است یا نه.

گام ۱. ترکیب را حساب می‌کنیم:

$$T_{a,b} \circ T_{c,d}(x) = a(cx + d) + b = acx + (ad + b).$$

پس $T_{a,b} T_{c,d} = T_{ac,\, ad+b}$ و عمل بسته است.

گام ۲. چون ترکیب توابع شرکت‌پذیر است، شرط دوم برقرار است. عضو همانی $T_{1,0}$ است.

گام ۳. از معادلهٔ $y = ax + b$ به‌دست می‌آوریم $x = (y - b)/a$، بنابراین

$$T_{a,b}^{-1} = T_{a^{-1},-b/a}.$$

گام ۴. جابه‌جایی را می‌آزماییم. $T_{2,0}.T_{1,1}(x) = 2x + 2$ ولی $T_{1,1}T_{2,0}.(x) = 2x + 1$. پس گروه ناجابجایی است.

یادداشت تاریخی: از معادلات جبری تا تقارن

مفهوم گروه از یک مسیر یگانه پدید نیامد: حل معادلات جبری، نظریهٔ اعداد و هندسهٔ قرن نوزدهم هر سه در شکل‌گیریِ آن نقش داشتند. ایدهٔ مهم این بود که به‌جای تمرکز بر شیء، تبدیلاتی را مطالعه کنیم که روابط آن شیء را حفظ می‌کنند. (منبع تاریخی: MacTutor, The development of group theory.)

۲.۱ چند نمونهٔ مهم

گروه متقارن S_n. جایگشت‌های n شیء، گروهی با مرتبهٔ $n!$ تشکیل می‌دهند. اگر $p \in S_n$، می‌توان نوشت

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}, \qquad (qp)(j) = q\big(p(j)\big).$$

در این قرارداد، ابتدا عملگر سمت راست اجرا می‌شود. همچنین هر جایگشت به حاصل‌ضرب دورهای جدا از هم تجزیه می‌شود؛ همانی $e = (1)(2)\cdots(n)$ و وارون با وارونه‌کردن جهت هر دور ساخته می‌شود.

نمونه‌های آبلیِ دیگر: اعداد صحیح تحت جمع، اعداد حقیقیِ مثبت تحت ضرب، و بردارهای یک فضای خطی تحت جمع. عضو خنثی در این سه نمونه، به‌ترتیب ۰، ۱ و بردار صفر است.

گروه‌های هندسی. $SO(2)$ و $SO(3)$ دوران‌های جهت‌نگهدارِ صفحه و فضای سه‌بعدی‌اند؛ $O(2)$ و $O(3)$ بازتاب‌ها را نیز دربر می‌گیرند و دو مؤلفهٔ پیوسته دارند. تعمیم‌ها شامل $SO(n), O(n), SU(n), U(n)$، گروه‌های متعامد مختلط و گروه‌های فضا‌ـزمان، مانند اقلیدسی، گالیله‌ای، لورنتسی و پوانکاره‌اند. تقارن‌های شکل‌های منتظم، نمونه‌های گروه نقطه‌ای را فراهم می‌کنند.

گروه آبلی است اگر $ab = ba$ برای همهٔ اعضا. S_2 و $SO(2)$ آبلی‌اند، اما S_n برای $n \geq 3$، و $O(2), SO(3), O(3)$ ناجابجایی‌اند.

از یکتایی وارون، قاعدهٔ حذف نتیجه می‌شود:

$$ab = ac \iff b = c, \qquad ba = ca \iff b = c.$$

برای یک گروه متناهی می‌توان جدول ضرب یا جدول کِیلی ساخت. چون قاعدهٔ حذف برقرار است، هر سطر و هر ستون دقیقاً یک بار تمام عناصر گروه را دربر دارد.

مثال حل‌شده: ضرب دورها در $S_۳$، بدون حدس‌زدن

بگذارید $p = (۱۲۳)$ و $q = (۱۲)$. می‌خواهیم qp و pq را بیابیم. طبق قرارداد، در qp اول p عمل می‌کند.

x	۱	۲	۳
$p(x)$	۲	۳	۱
$q(p(x))$	۱	۳	۲

پس $qp = (۲۳)$. در جهت دیگر:

x	۱	۲	۳
$q(x)$	۲	۱	۳
$p(q(x))$	۳	۲	۱

بنابراین $pq = (۱۳) \neq qp$. حتی با سه شیء، ترتیب اجرای عملیات اهمیت دارد.

مثال حل‌شده: جدول ضربِ کوچک اما پُراطلاعات

گروه $\mathbb{Z}_۴ = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ با جمع پیمانهٔ ۴ را در نظر بگیرید. مثلاً $۲ + ۳ \equiv ۱ \pmod ۴$، پس:

$+_۴$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۰
۲	۲	۳	۰	۱
۳	۳	۰	۱	۲

همانی صفر است؛ وارون‌های ۱، ۲، ۳ به‌ترتیب ۳، ۲، ۱ هستند. هر سطر و ستون یک جایگشت از چهار عضو است. نکتهٔ فیزیکی: این گروه می‌تواند چهار انتقال پیاپی روی حلقه‌ای با چهار جایگاه را توصیف کند.

پیوند با فیزیک: چرا $SO(۳)$ ناجابجایی است؟

دو دورانِ نوددرجه‌ای حول محورهای x و y را در نظر بگیرید. اگر $\mathbf{e}_z = (۰, ۰, ۱)^T$، آنگاه

$$R_x(\tfrac{\pi}{۲})R_y(\tfrac{\pi}{۲})\mathbf{e}_z = (۱, ۰, ۰)^T, \quad R_y(\tfrac{\pi}{۲})R_x(\tfrac{\pi}{۲})\mathbf{e}_z = (۰, -۱, ۰)^T.$$

پس به‌طور کلی $R_xR_y \neq R_yR_x$. این تفاوت اساس رابطه‌های جابه‌جاییِ تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی است.

۳.۱ عملیات درون یک گروه

۱.۳.۱ هم‌نهشتی، کلاس‌های مزدوج و زیرگروه‌ها

اگر $a, b \in G$، عنصر $a' = bab^{-1}$ را **مزدوج** a به‌وسیلهٔ b می‌نامیم. **کلاس مزدوج** عنصر a مجموعهٔ

$$C(a) = \{bab^{-1} : b \in G\}$$

است. مزدوج‌بودن یک رابطهٔ هم‌ارزی است؛ بنابراین کلاس‌ها یا دقیقاً یکسان‌اند یا اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها کل گروه است. همواره $C(e) = \{e\}$. در S_n دو جایگشت زمانی و تنها زمانی مزدوج‌اند که **ساختار دوری یکسان** داشته باشند. در $SO(3)$ دوران‌های دارای یک زاویهٔ یکسان (با محورهای ممکنِ مختلف)، در یک کلاس جای می‌گیرند.

زیرمجموعهٔ ناتهی $H \subseteq G$ را **زیرگروه** می‌گوییم اگر با همان عمل گروهی، خود یک گروه باشد. آزمون کوتاه زیرگروه چنین است:

$$H \le G \quad \Longleftrightarrow \quad h_1^{-1} h_2 \in H \qquad (h_1, h_2 \in H),$$

به شرط ناتهی‌بودن H. نمونه‌ها: اعداد زوج در $\mathbb{Z}$، جایگشت‌های زوج A_n در S_n، جایگشت‌های ثابت‌گذارِ n و دوران‌ها حول یک محور ثابت.

هر عضو a از گروه متناهی، یک زیرگروه دوری تولید می‌کند:

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{q-1}\}, \qquad q = \operatorname{ord}(a), \quad a^q = e.$$

عدد q **مرتبهٔ عضو** است؛ در بخش بعد نشان می‌دهیم $q \mid |G|$. افزون‌براین، gHg^{-1} همواره یک **زیرگروهِ مزدوج** با H است.

مثال حل‌شده: کلاس‌های مزدوج S_3 را از صفر بسازیم

اعضای S_3 عبارت‌اند از e، سه جابه‌جایی $(12), (13), (23)$ و دو دور سه‌تایی $(123), (132)$.
گام ۱. برای هر $g \in S_3$ داریم $g(12)g^{-1} = (g(1)\, g(2))$، پس هر ترانهاده به ترانهادهٔ دیگری مزدوج می‌شود.
گام ۲. مشابه آن، $g(123)g^{-1} = (g(1)\, g(2)\, g(3))$ یک دور سه‌تایی باقی می‌ماند.
نتیجه:

$$C_1 = \{e\}, \quad C_2 = \{(12), (13), (23)\}, \quad C_3 = \{(123), (132)\}.$$

اندازه‌ها $1 + 3 + 2 = 6$ می‌شوند؛ کمی جلوتر خواهیم دید چرا همین عدد ۳، تعداد بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیر نامعادل را نیز مشخص می‌کند.

۲.۳.۱ هم‌دسته‌ها، قضیهٔ لاگرانژ و گروه خارج‌قسمتی

برای زیرگروه H، مجموعه‌های $aH = \{ah : h \in H\}$ و $Ha = \{ha : h \in H\}$ را دو گونهٔ **هم‌دسته** می‌نامند. هر دو خانواده، گروه را به بخش‌های جدا از هم تقسیم می‌کنند. هر هم‌دسته به‌اندازهٔ H عضو دارد؛ در نتیجه

$$|G| = [G : H]\, |H|, \qquad |H| \mid |G|.$$

این همان قضیهٔ لاگرانژ است. اگر $gHg^{-1} = H$ برای هر $g \in G$، زیرگروه را **نرمال** می‌نامیم و می‌نویسیم $H \trianglelefteq G$. در این حالت $aH = Ha$، و هم‌دسته‌ها با عمل $(aH)(bH) = abH$ یک **گروه خارج‌قسمتی** G/H می‌سازند که مرتبه‌اش $|G|/|H|$ است.

> **یادداشت آموزشی و ویرایشی: تفاوت یک نام‌گذاری در متن مبدأ**
>
> در متن انگلیسیِ این فصل، برچسب‌های «چپ» و «راست» برای aH و Ha برخلاف قرارداد رایجِ امروزی آمده‌اند. در این جزوه از قرارداد متعارف استفاده می‌کنیم: aH هم‌دستهٔ چپ و Ha هم‌دستهٔ راست است. همهٔ فرمول‌های ریاضیِ مربوط، مستقل از این نام‌گذاری‌اند.

مثال حل‌شده: یک خارج‌قسمتی واقعی: S_3/A_3

گروه $A_3 = \{e, (123), (132)\}$ سه عضو دارد. هر جایگشت زوج است یا فرد و حاصل‌ضرب جایگشت‌های هم‌پاریتی زوج است؛ پس $A_3 \trianglelefteq S_3$.
گام ۱. از $|S_3|/|A_3| = 2$ فقط دو هم‌دسته داریم:

$$A_3, \quad (12)A_3 = \{(12), (13), (23)\}.$$

گام ۲. اگر $X = (12)A_3$، آنگاه $X^2 = (12)^2 A_3 = A_3$.
نتیجه. جدول ضرب خارج‌قسمتی با $\mathbb{Z}_2$ یکسان است و $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$. پس «زوج یا فرد بودن» یک گروه دو عضوی می‌سازد.

۳.۳.۱ مرکز، گروه جابه‌جاساز و گروه‌های ساده

مرکز گروه عبارت است از

$$Z(G) = \{a \in G : ab = ba \text{ برای هر } b \in G\}.$$

جابه‌جاساز گروهی دو عضو را با $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ تعریف می‌کنیم. این عضو دقیقاً وقتی همانی است که a و b جابه‌جا شوند؛ همچنین

$$[a, b]^{-1} = [b, a], \qquad c[a, b]c^{-1} = [cac^{-1}, cbc^{-1}].$$

زیرگروه مشتق یا **زیرگروه جابه‌جاساز**، $G' = [G, G]$، از تمام حاصل‌ضرب‌های متناهیِ این جابه‌جاسازها ساخته می‌شود و نرمال است. خارج‌قسمتیِ G/G' آبلی است؛ در واقع اگر G/H آبلی باشد، لزوماً $G' \subseteq H$. برای S_n با $n \geq 2$، داریم $S_n' = A_n$.

گروه ساده زیرگروه نرمالِ سرهٔ نابدیهی ندارد؛ گروه نیمه‌ساده در تعریفِ به‌کاررفته در فصل، زیرگروه نرمالِ آبلیِ نابدیهی ندارد. پس ساده‌بودن، نیمه‌ساده‌بودن را نتیجه می‌دهد. برای S_4، افزون‌بر A_4، زیرگروه نرمالِ چهارعضوی V_4 نیز وجود دارد و $S_4/V_4 \cong S_3$. گروه $SO(3)$ از منظر زیرگروه‌های نرمال مجرد، ساده است.

مثال حل‌شده: چرا $S_۴' = A_۴$؟

گام ۱. نگاشت علامت $\operatorname{sgn} : S_۴ \to \{\pm ۱\}$ همریختی است. تصویر آبلی است، پس هر جابه‌جاساز علامت $+۱$ دارد و $S_۴' \subseteq A_۴$.
گام ۲. برای $a = (۱۲)$ و $b = (۲۳)$، از وارون‌پذیری ترانهاده‌ها استفاده می‌کنیم:

$$[a,b] = (۱۲)(۲۳)(۱۲)(۲۳) = (۱۳۲),$$

که مولدِ $A_۴$ است.
نتیجه. چون $S_۴'$ شامل مولد $A_۴$ است، $A_۴ \subseteq S_۴'$؛ پس برابری برقرار است.

۴.۳.۱ خودریختی‌ها

خودریختی نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $\tau : G \to G$ است که $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$. هر خودریختی، همانی و وارون‌ها را حفظ می‌کند. برای $g \in G$، نگاشت $\tau_g(a) = gag^{-۱}$ یک خودریختی درونی است. خودریختی‌هایی که از این صورت نیستند، بیرونی نام دارند. در گروه آبلی، تمام خودریختی‌های درونی، همانی‌اند.

مثال حل‌شده: خودریختی‌های $\mathbb{Z}_۵$

هر همریختیِ گروه جمعی $\mathbb{Z}_۵$ با تصویر ۱ تعیین می‌شود: اگر $\tau(۱) = k$، آنگاه $\tau(m) = km$ $(\bmod ۵)$. برای خودریختی باید $k \neq ۰$ باشد، چون در غیر این صورت تمام عناصر به صفر می‌روند. پس چهار خودریختی داریم، متناظر با $k = ۱, ۲, ۳, ۴$. ترکیب خودریختی‌ها به ضرب پیمانهٔ ۵ تبدیل می‌شود؛ بنابراین

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_۵) \cong \mathbb{Z}_۵^{\times} \cong \mathbb{Z}_۴.$$

۴.۱ روابط میان گروه‌ها و روش‌های ترکیب آن‌ها

همریختی. نگاشت $\varphi : G_۱ \to G_۲$ همریختی است اگر $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. خودبه‌خود $\varphi(e_۱) = e_۲$، $\varphi(a^{-۱}) = \varphi(a)^{-۱}$، و تصویر $\operatorname{im}\varphi$ زیرگروهی از $G_۲$ است. **هسته**، $\ker\varphi = \{a : \varphi(a) = e_۲\}$، زیرگروهی نرمال است.

یکریختی. همریختیِ دوسویی را یکریختی می‌گوییم و $G_۱ \cong G_۲$ می‌نویسیم. قضیهٔ بنیادی نخست یکریختی می‌گوید

$$G_۱ / \ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi.$$

ضرب مستقیم. اعضای $G_۱ \times G_۲$ زوج‌های مرتب‌اند و

$$(a_۱,a_۲)(b_۱,b_۲) = (a_۱b_۱, a_۲b_۲), \quad (e_۱,e_۲), \quad (a_۱,a_۲)^{-۱} = (a_۱^{-۱}, a_۲^{-۱}).$$

مرتبهٔ ضرب مستقیم، حاصل‌ضرب مرتبه‌ها است؛ هر عامل به‌طور طبیعی زیرگروهی نرمال از ضرب مستقیم است.

ضرب نیمه‌مستقیم. اگر برای هر $a \in G_1$ خودریختی $\tau_a \in \mathrm{Aut}(G_2)$ داشته باشیم، به‌گونه‌ای که $\tau_a\tau_b = \tau_{ab}$ و $\tau_{a^{-1}} = \tau_a^{-1}$، ضرب پیچ‌خوردهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(a, x)(b, y) = (ab,\, x\,\tau_a(y)).$$

در این ساختار، عامل دوم نرمال است و خارج‌قسمتی بر آن، با عامل اول یکریخت است. این همان ضرب نیمه‌مستقیم $G_2 \rtimes G_1$ در قرارداد رایج است؛ در متن مبدأ ترتیب نوشتن دو عامل متفاوت انتخاب شده است.

مثال حل‌شده: از ضرب نیمه‌مستقیم تا تقارن یک مثلث

گروه دوران‌های مثلث منتظم $\mathbb{Z}_3 = \langle r \mid r^3 = e\rangle$ و بازتاب‌های حاصل از یک بازتابِ منتخب، $\mathbb{Z}_2 = \langle s \mid s^2 = e\rangle$، را در نظر بگیرید. رابطهٔ هندسی $srs^{-1} = r^{-1}$ است.
هر تقارن به شکل $r^i s^j$ با $i = 0, 1, 2$ و $j = 0, 1$ نوشته می‌شود. در نتیجه

$$(r^i s^j)(r^k s^\ell) = r^{\,i+(-1)^j k} s^{j+\ell},$$

با توان‌های پیمانهٔ ۳ و ۲. پس گروه شش‌عضویِ تقارن‌های مثلث

$$D_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S_3$$

است. تفاوت این گروه با $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$ همان منفی‌شدن k هنگام حضور بازتاب است؛ اولی ناجابجایی و دومی آبلی است.

پیوند با فیزیک: تقارن‌های فضا–زمان

در گروه اقلیدسیِ سه‌بعدی، دوران R بر بردار انتقال $\mathbf{a}$ اثر می‌کند:

$$(R, \mathbf{a})(S, \mathbf{b}) = (RS,\, \mathbf{a} + R\mathbf{b}).$$

این یک ضرب نیمه‌مستقیم $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$ است، نه ضرب مستقیم؛ چون جابه‌جاییِ یک جسم پیش از دوران با جابه‌جاییِ همان جسم پس از دوران یکسان نیست.

۵.۱ تحقق‌های یک گروه و عمل گروهی

برای تحقق یک گروه روی مجموعهٔ X، به هر $g \in G$ یک نگاشت دوسوییِ $\phi_g : X \to X$ نسبت می‌دهیم به‌گونه‌ای که

$$\phi_e = \mathrm{Id}_X, \qquad \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2} = \phi_{g_1 g_2}, \qquad \phi_{g^{-1}} = (\phi_g)^{-1}.$$

به این ساختار، عمل گروهی نیز می‌گوییم. چند مفهوم طبیعی از آن پدید می‌آید:

- **مدار** یک نقطه: $\mathcal{O}(x) = \{\phi_g(x) : g \in G\}$.
- **پایدارساز (گروه همسانگردی)**: $H_x = \{g \in G : \phi_g(x) = x\}$.

- **نقاط ثابت یک عضو** g: $X^g = \{x \in X : \phi_g(x) = x\}$.

رابطهٔ $x \sim y$ به معنای $y = \phi_g(x)$ برای دست‌کم یک g، رابطه‌ای هم‌ارزی است و مجموعهٔ X را به مدارهای جدا از هم تقسیم می‌کند. پایدارسازِ هر نقطه زیرگروه است و برای گروه متناهی، $|\mathcal{O}(x)| = [G : H_x]$.

در مکانیک هامیلتونی، گروه‌ها معمولاً به‌شکل تبدیلات کانونیِ فضای فاز ظاهر می‌شوند. در مکانیک کوانتومی، اصل برهم‌نهی، فضای حالتِ برداری (معمولاً هیلبرت) را مهم می‌کند؛ بنابراین تحقق‌های خطیِ گروه، یعنی بازنمایی‌ها، ابزار اصلی ما خواهند بود.

مثال حل‌شده: مثلث رنگی و قضیهٔ مدار ـ پایدارساز

سه رأس مثلث را با ۱, ۲, ۳ بنامید. گروه $S_۳$ روی مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, ۳\}$ عمل می‌کند. مدار رأس ۱ کل X است، زیرا جایگشتی وجود دارد که آن را به هر رأس دلخواه ببرد.
گام ۱. پایدارساز رأس ۱ دو عنصر دارد: $H_۱ = \{e, (۲۳)\}$.
گام ۲. پس

$$|\mathcal{O}(۱)| = \frac{|S_۳|}{|H_۱|} = \frac{۶}{۲} = ۳,$$

دقیقاً به‌اندازهٔ تعداد رأس‌ها.
گام ۳. اگر $y = g \cdot ۱$، آنگاه h زمانی y را ثابت نگه می‌دارد که $g^{-۱}hg$ رأس ۱ را ثابت نگه دارد؛ پس $H_y = gH_۱g^{-۱}$. این همان علت مزدوج‌بودن پایدارسازهای نقاط یک مدار است.

مثال حل‌شده: یک آزمایش شمارشی: چند رنگ‌آمیزی واقعاً متفاوت؟

رأس‌های یک مثلثِ منتظم را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ بزنید؛ چرخاندن مثلث، رنگ‌آمیزی جدید محسوب نمی‌شود. گروه دوران $C_۳$ سه عضو دارد.
گام ۱. همانی هر $۸ = ۲^۳$ رنگ‌آمیزی را ثابت می‌گذارد.
گام ۲. هر دوران ۱۲۰° یا ۲۴۰° تنها زمانی رنگ‌آمیزی را تغییر نمی‌دهد که هر سه رأس یک‌رنگ باشند؛ پس هرکدام ۲ حالت ثابت دارند.
گام ۳. با لم شمارش مدارها، که در مسائل انتهای فصل اثبات می‌شود:

$$\#\text{مدارها} = \frac{۸ + ۲ + ۲}{۳} = ۴.$$

چهار حالت را می‌توان با تعداد رأس‌های سیاه ۰, ۱, ۲, ۳ نمایش داد. جملهٔ شوخیِ ریاضی: قبل از خرید هشت مدل مثلث رنگی، اول ببینید چهار تای آن‌ها فقط چرخیده‌اند!

یادداشت تاریخی: لمی که ظاهراً نامِ صاحبِ اصلی‌اش را ندارد

فرمول شمارش مدارها معمولاً «لم برنساید» نامیده می‌شود، اما صورت‌های پیشین آن در کارهای کوشی و سپس فروبنیوس دیده می‌شود. در روایت‌های تاریخیِ دقیق‌تر، نام «لم کوشی ـ فروبنیوس» نیز به‌کار می‌رود؛ نام مشهورش یادآور این است که تاریخ نام‌گذاریِ ریاضیات همیشه به‌سادگیِ خودِ فرمول نیست. (منبع: Encyclopedia of Mathematics, Burnside Lemma.)

۶.۱ بازنمایی‌های گروه

فرض کنید V فضایی برداری بر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. یک **بازنمایی خطی** از G روی V، نگاشت

$$D : G \longrightarrow GL(V), \qquad D(e) = ۱, \qquad D(g_۱ g_۲) = D(g_۱) D(g_۲)$$

است؛ در نتیجه $D(g^{-۱}) = D(g)^{-۱}$. بُعد بازنمایی، همان بُعد V است. اگر تنها همانی به عملگر یکانی فرستاده شود، یا معادل آن اگر D یک‌به‌یک باشد، بازنمایی **وفادار** است؛ در غیر این صورت **ناوفادار** خواهد بود. ممکن است یک گروه دارای بازنمایی‌های متعددی با ابعاد مختلف باشد.

یک عمل گروهی روی مجموعه‌ای فاقد ساختار برداری را نیز می‌توان به بازنمایی تبدیل کرد: فضای برداری $\mathbb{F}[X]$ را با پایهٔ صوری $\{|x\rangle : x \in X\}$ می‌سازیم و تعریف می‌کنیم

$$D(g)|x\rangle = |g \cdot x\rangle,$$

سپس عمل را با خطی‌بودن به ترکیب‌های خطیِ پایه‌ها گسترش می‌دهیم. انتخاب $X = G$ ما را به **بازنمایی منتظم** می‌رساند.

مثال حل‌شده: چرا یک بازنمایی می‌تواند ناوفادار باشد؟

گروه دوری $\mathbb{Z}_۴$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$D(k) = (-۱)^k \qquad (k = ۰, ۱, ۲, ۳).$$

گام ۱. چون $(-۱)^{k+\ell} = (-۱)^k (-۱)^\ell$، این یک بازنمایی یک‌بُعدی روی $\mathbb{C}$ است.
گام ۲. $D(۰) = D(۲) = ۱$. پس دو عنصر متفاوت به یک ماتریس فرستاده می‌شوند و بازنمایی وفادار نیست.
گام ۳. هستهٔ بازنمایی $\{۰, ۲\}$ است. تصویرِ آن دقیقاً $\mathbb{Z}_۲ \cong \{+۱, -۱\}$ است؛ قضیهٔ یکریختی توضیح می‌دهد چرا $\mathbb{Z}_۴ / \{۰, ۲\} \cong \mathbb{Z}_۲$.

مثال حل‌شده: بازنمایی جایگشتیِ $S_۳$ از عمل روی سه رأس

پایهٔ $V = \mathbb{C}^۳$ را $e_۱, e_۲, e_۳$ می‌گیریم و $D(p) e_j = e_{p(j)}$ تعریف می‌کنیم. برای $p = (۱۲۳)$ داریم

$$D(p) = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad D(p)^۳ = I_۳.$$

برای $s = (۱۲)$:

$$D(s) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad D(s)^۲ = I_۳.$$

به‌جای ضرب‌کردنِ شش ماتریس، کافی است بدانیم $D(p)D(q)e_j = e_{p(q(j))}$؛ پس قانون بازنمایی به‌طور خودکار برقرار است. بردار $(۱, ۱, ۱)^T$ در همهٔ این ماتریس‌ها ثابت می‌ماند؛ این سرنخی برای

تحویل‌پذیری است.

۷.۱ بازنمایی‌های معادل

دو بازنمایی D روی V و D' روی V' را **معادل** می‌گوییم اگر نگاشت خطیِ وارون‌پذیر $S : V \to V'$ وجود داشته باشد که برای تمام عناصر گروه

$$D'(g) = SD(g)S^{-1}$$

برقرار باشد. بنابراین معادل‌بودن دربارهٔ شکل ظاهری ماتریس‌ها نیست، بلکه دربارهٔ یکی‌بودنِ ساختار عمل گروه در دو دستگاه مختصات است. می‌توان بازنمایی‌ها را تا حد همین هم‌ارزی دسته‌بندی کرد.

مثال حل‌شده: تعویض پایه، بدون تغییر فیزیک

بازنماییِ $\mathbb{Z}_2 = \{e, s\}$ را با $D(s) = \mathrm{diag}(1, -1)$ بگیرید. ماتریس

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = S$$

وارون‌پذیر است. محاسبهٔ مستقیم می‌دهد:

$$SD(s)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x.$$

پس بازنمایی‌ای که در یک پایه «علامت مؤلفهٔ دوم» را برمی‌گرداند، در پایهٔ دیگری «دو مؤلفه را جابه‌جا» می‌کند. دو نمایش ماتریسی متفاوت‌اند اما بازنمایی‌ها معادل‌اند.

۸.۱ بازنمایی‌های یکانی و متعامد

اگر V به ضرب داخلیِ هرمیتی (در حالت مختلط) یا متقارن (در حالت حقیقی) مجهز باشد، بازنمایی را **یکانی** یا **متعامد** می‌خوانیم اگر

$$\langle D(g)x, D(g)y \rangle = \langle x, y \rangle \qquad (g \in G,\ x, y \in V).$$

در پایهٔ متعامدهنجار، این شرط به $D(g)^\dagger D(g) = I$ یا $D(g)^T D(g) = I$ تبدیل می‌شود. همهٔ بازنمایی‌های متناهی‌بُعد گروه‌های متناهی روی $\mathbb{C}$ را می‌توان با تغییر مناسب ضرب داخلی، یکانی کرد؛ دربارهٔ گروه‌های فشرده نیز با فرض پیوستگی و شرایط معمولِ بازنماییِ متناهی‌بُعد چنین است. برعکس، بازنمایی‌های متناهی‌بُعدِ غیر بدیهیِ گروه لورنتس الزاماً یکانی نیستند.

مثال حل‌شده: ساخت ضرب داخلیِ ناوردا به‌وسیلهٔ میانگین‌گیری

فرض کنید $D:G\to GL(V)$ بازنماییِ یک گروه متناهی باشد و $\langle\cdot,\cdot\rangle$ هر ضرب داخلیِ مثبت‌معین اولیه. تعریف می‌کنیم

$$\langle u,v\rangle_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle D(g)u,D(g)v\rangle.$$

گام ۱. این عبارت هرمیتی و نسبت به هر ورودی خطی یا پادخطی است، چون میانگینِ ضرب‌های داخلی است.
گام ۲. اگر $u\neq 0$، وارون‌پذیریِ $D(g)$ باعث $\|D(g)u\|^2>0$ می‌شود؛ پس $\langle u,u\rangle_G>0$.
گام ۳. برای $h\in G$ داریم

$$\langle D(h)u,D(h)v\rangle_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g}\langle D(gh)u,D(gh)v\rangle.$$

چون $g\mapsto gh$ جایگشتی از عناصر گروه است، این مجموع با مقدار اولیه برابر می‌شود. پس ضرب داخلیِ جدید ناورداست؛ اگر ماتریس‌های گرام آن M باشد، $D(h)^{\dagger}MD(h)=M$. با انتخاب پایهٔ متعامدهنجار نسبت به M، تمام $D(h)$ یکانی می‌شوند.

پیوند با فیزیک: چرا تقارن کوانتومی با یکانیت همراه است؟

یکانیت ضرب داخلی را حفظ می‌کند، پس احتمال‌های $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ تحت تقارن تغییر نمی‌کنند. در همین جاست که یک ادعای ظاهراً انتزاعیِ ریاضی به شرطی فیزیکی دربارهٔ پایستگی احتمال تبدیل می‌شود.

۹.۱ ماتریس‌های یک بازنمایی

اگر V متناهی‌بُعد باشد و $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ پایه‌ای برای آن انتخاب کنیم، عمل $D(g)$ را با ضرایب

$$D(g)e_j=\sum_{i=1}^{n}D_{ij}(g)e_i$$

بیان می‌کنیم. در این قرارداد، i نمایهٔ سطر و j نمایهٔ ستون است و قانون گروهی به ضرب ماتریسی تبدیل می‌شود:

$$D_{ij}(g_1g_2)=\sum_{k}D_{ik}(g_1)D_{kj}(g_2),\qquad D_{ij}(e)=\delta_{ij}.$$

در تغییر پایهٔ وارون‌پذیر، ماتریس‌ها با تبدیل تشابه دگرگون می‌شوند؛ با قرارداد پایه‌گذاری مناسب $D'(g)=SD(g)S^{-1}$. اگر ضرب داخلی و پایه هر دو متعامدهنجار باشند، ماتریس‌های بازنمایی یکانی یا متعامد خواهند بود.

مثال حل‌شده: رد و دترمینان تحت تغییر پایه

برای هر ماتریس وارون‌پذیر S، داریم $A' = SAS^{-1}$. با چرخه‌ای‌بودن رد:

$$\operatorname{Tr} A' = \operatorname{Tr}(SAS^{-1}) = \operatorname{Tr}(AS^{-1}S) = \operatorname{Tr} A.$$

همچنین $\det A' = \det S \det A \det S^{-1} = \det A$. پس مقادیر ویژه، رد و دترمینان به انتخاب پایه وابسته نیستند. اما مثلاً درایهٔ A_{12} عموماً تغییر می‌کند. این تمایز توضیح می‌دهد چرا کاراکتر یک بازنمایی، که بر حسب رد تعریف می‌شود، ابزار طبقه‌بندیِ قدرتمندی است.

۱۰.۱ عملیات روی بازنمایی‌ها

برای یک بازنمایی ماتریسی $D(g)$ می‌توان سه بازنمایی دیگر ساخت:

$$D^{\vee}(g) = \big(D(g)^{T}\big)^{-1} = D(g^{-1})^{T}, \quad D^{\sharp}(g) = \big(D(g)^{\dagger}\big)^{-1}, \quad \overline{D}(g) = D(g)^{*}.$$

این‌ها به‌ترتیب **بازنمایی دوگان یا پادوردایی**، **بازنماییِ هرمیتیِ دوگان** و **بازنمایی مزدوج مختلط** نامیده می‌شوند. بازنمایی دوم مزدوج مختلطِ اول است. برای بازنمایی یکانی، $D^{\sharp} = D$ و $D^{\vee} = \overline{D}$. برای بازنمایی حقیقیِ متعامد، $D^{\vee} = D$.

اگر D_1, D_2 بازنمایی‌های یک گروه باشند، **جمع مستقیم** روی $V_1 \oplus V_2$ به‌صورت بلوکی

$$(D_1 \oplus D_2)(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

و **ضرب تانسوری** روی $V_1 \otimes V_2$ با قانون

$$(D_1 \otimes D_2)(g)(u \otimes v) = D_1(g)u \otimes D_2(g)v$$

تعریف می‌شوند. بُعدِ جمع مستقیم برابر مجموع ابعاد، و بُعدِ ضرب تانسوری برابر حاصل‌ضرب آن‌هاست.

مثال حل‌شده: چه اتفاقی برای دو اسپینِ $\frac{1}{2}$ می‌افتد؟

فضای هر اسپین $\mathbb{C}^2$ است، پس فضای دو اسپین $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ چهار بُعد دارد. عمل یک دوران، $D^{(1/2)}(R) \otimes D^{(1/2)}(R)$ خواهد بود. با جمع دو اسپین، حالت‌های متقارن

$$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |1,0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

یک زیر فضای سه‌بُعدی می‌سازند، و حالت پادمتقارن

$$|0,0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

یک زیر فضای یک‌بُعدی است. بنابراین $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$. بخش‌های بعد توضیح می‌دهند چگونه چنین تجزیه‌ای را با کاراکترها و بدون حدس‌زدن حالت‌ها به‌دست آوریم.

۱۱.۱ کاراکترِ بازنمایی

کاراکتر بازنمایی D تابعِ

$$\chi_D(g) = \operatorname{Tr} D(g)$$

است. چون رد زیر تبدیل تشابه ثابت می‌ماند، کاراکتر مستقل از پایه است. همچنین برای هر $h \in G$:

$$\chi_D(hgh^{-1}) = \operatorname{Tr}\big(D(h)D(g)D(h)^{-1}\big) = \chi_D(g).$$

پس کاراکتر روی هر کلاس مزدوج ثابت است؛ به چنین تابعی **تابعِ کلاسی** می‌گوییم. اگر بازنمایی یکانی باشد، $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^{*}$. و نیز

$$\chi_{D_1 \oplus D_2}(g) = \chi_{D_1}(g) + \chi_{D_2}(g), \qquad \chi_{D_1 \otimes D_2}(g) = \chi_{D_1}(g)\chi_{D_2}(g).$$

بعدها نشان می‌دهیم که برای بازنمایی‌های متناهی‌بُعد گروه‌های متناهی روی $\mathbb{C}$، کاراکتر بازنمایی را تا حد هم‌ارزی به‌طور کامل تعیین می‌کند.

مثال حل‌شده: محاسبهٔ سریعِ کاراکترِ یک بازنمایی جایگشتی

در بازنمایی جایگشتی S_3 روی سه رأس، هر ماتریس، پایه‌ها را جابه‌جا می‌کند. درایهٔ قطری $D(p)_{ii}$ برابر ۱ است اگر $p(i) = i$، و در غیر این صورت صفر است. بنابراین

$$\chi(p) = \#\{i : p(i) = i\}.$$

گام ۱. همانی هر سه رأس را ثابت می‌گذارد، پس $\chi(e) = 3$.
گام ۲. هر ترانهاده یک رأس را ثابت می‌گذارد، پس $\chi((12)) = 1$.
گام ۳. دورهای سه‌تایی هیچ رأس ثابتی ندارند، پس $\chi((123)) = 0$.
به این ترتیب جدول کاراکتر روی سه کلاس، $(3, 1, 0)$ است، بی‌آنکه نیاز باشد همهٔ ماتریس‌ها را جداگانه بنویسیم.

یادداشت تاریخی: سال ۱۸۹۶؛ یک «رد» که دری تازه باز کرد

گئورگ فروبنیوس در سال 1896 مفهوم کاراکتر را برای گروه‌های متناهی به‌صورت نظام‌مند گسترش داد؛ حتی جالب‌تر اینکه در نخستین صورت‌بندیِ او، کاراکترها پیش از پیوند نهایی‌شان با ردِ ماتریس‌های بازنمایی معرفی شدند. ارتباط کامل با بازنمایی‌های ماتریسی در کارهای بعدیِ او شکل گرفت. (منبع: زندگی‌نامهٔ فروبنیوس در MacTutor.)

۱۲.۱ زیرفضاهای ناوردا؛ تحویل‌پذیری و تحویل‌ناپذیری

اگر D روی فضای V عمل کند، زیرفضای $W \subseteq V$ را **ناوردا** می‌نامیم اگر $D(g)W \subseteq W$ برای تمام $g \in G$. بازنمایی زمانی **تحویل‌ناپذیر** (irreducible) است که تنها زیرفضاهای ناوردای آن، $\{0\}$ و V باشند. اگر زیرفضای ناوردای نابدیهی وجود داشته باشد، بازنمایی **تحویل‌پذیر** است.

در حالت تحویل‌پذیر، ممکن است بتوان فضای V را به جمع مستقیمِ دو زیرفضای ناوردا $V = W \oplus W'$ تجزیه کرد؛ آن‌گاه بازنمایی **تجزیه‌پذیر** است. اگر چنین مکمل ناوردایی وجود نداشته باشد، بازنمایی **تجزیه‌ناپذیر** خواهد بود. در پایهٔ سازگار با W:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & B(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}.$$

تجزیه‌پذیری یعنی با انتخاب پایهٔ مناسب بتوان بلوک $B(g)$ را برای همهٔ g صفر کرد. برای یک بازنمایی یکانی، اگر W ناوردا باشد، متمم عمودی $W^{\perp}$ نیز ناورداست؛ پس هر بازنمایی یکانیِ متناهی‌بُعد به جمع مستقیمی از بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیر یکانی (UIR) تجزیه می‌شود. برای گروه‌های متناهی روی $\mathbb{C}$، این نتیجه همان محتوای قضیهٔ ماشکه است.

مثال حل‌شده: چگونه یک بازنماییِ سه‌بُعدی به ۲ + ۱ می‌شکند؟

همان بازنمایی جایگشتی S_3 روی $\mathbb{C}^3$ را بگیرید. چون هر جایگشت جمع مؤلفه‌ها را نگه می‌دارد، دو زیرفضای زیر ناوردا هستند:

$$W_0 = \operatorname{span}\{(1,1,1)^T\}, \quad W_2 = \{(x,y,z)^T : x+y+z = 0\}.$$

گام ۱. $\dim W_0 = 1$، $\dim W_2 = 2$ و $W_0 \cap W_2 = \{0\}$. پس $\mathbb{C}^3 = W_0 \oplus W_2$.
گام ۲. اگر $v \in W_2$، جایگشتِ مؤلفه‌ها جمعِ صفر را حفظ می‌کند؛ بنابراین $D(p)v \in W_2$.
گام ۳. W_0 بازنمایی بدیهی را حمل می‌کند. روی W_2، بازنماییِ دوبُعدی استاندارد قرار دارد که تحویل‌ناپذیر است: اگر خطی ناوردا بر تمام جایگشت‌ها وجود داشت، باید یک بردارِ ویژهٔ مشترک برای دو ترانهادهٔ غیرجابه‌جا می‌داشت؛ چنین خطی در صفحهٔ $x+y+z=0$ وجود ندارد.
پس $\mathbb{3}_{\text{perm}} = 1 \oplus 2$.

مثال حل‌شده: تحویل‌پذیر، اما تجزیه‌ناپذیر: یک دامِ رایج

گروه جمعیِ $(\mathbb{R}, +)$ را با ماتریس‌های

$$D(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بازنمایی کنید. از $D(a)D(b) = D(a+b)$ می‌دانیم بازنمایی است.
گام ۱. خط $W = \operatorname{span}\{e_1\}$ ناورداست، چون $D(a)e_1 = e_1$. پس تحویل‌پذیر است.
گام ۲. فرض کنید خطِ مکمل ناوردای دیگری به‌صورت $U = \operatorname{span}\{(x,y)^T\}$ وجود دارد. برای مکمل‌بودن باید $y \neq 0$. ناوردایی یعنی برای هر a، بردار $(x+ay, y)$ مضربی از (x,y) باشد.
گام ۳. از مؤلفهٔ دوم ضریبِ تناسب ۱ به‌دست می‌آید؛ از مؤلفهٔ اول $ay = 0$ برای همهٔ a نتیجه می‌شود که با $y \neq 0$ ناسازگار است.
پس D **تحویل‌پذیر اما تجزیه‌ناپذیر** است. این مثال نشان می‌دهد چرا شرط متناهی یا فشرده‌بودن گروه در قضیهٔ تجزیهٔ کامل اهمیت دارد.

یادداشت تاریخی: ماشکه و معجزهٔ «شکستن به قطعات ساده»

هاینریش ماشکه در سال 1899 قضیهٔ تجزیهٔ کاملِ بازنمایی‌های گروه متناهی را منتشر کرد (حالت خاصی را پیش‌تر، در 1898، بررسی کرده بود). اهمیت قضیه را می‌توان با این جمله خلاصه کرد: کافی است قطعات تحویل‌ناپذیر را بشناسیم؛ بقیهٔ بازنمایی‌ها با کنارهم‌گذاشتن آن قطعات ساخته می‌شوند. (منبع: MacTutor, Heinrich Maschke.)

۱۳.۱ لم شور: اثبات و کاربردهای بنیادی

این لم یکی از ستون‌های نظریهٔ بازنمایی است. فرض کنید $D : G \to GL(V)$ و $D' : G \to GL(V')$ دو بازنمایی تحویل‌ناپذیر روی فضاهای مختلط باشند، و نگاشت خطی $T : V \to V'$ برای همهٔ g رابطهٔ

$$TD(g) = D'(g)T$$

را ارضا کند. به T **عملگر میان‌باف** (intertwiner) می‌گوییم. **لم نخست شور** می‌گوید: یا $T = 0$، یا T وارون‌پذیر است و دو بازنمایی معادل‌اند.

اثبات. هستهٔ $N(T) = \{v : Tv = 0\}$ تحت D ناورداست، چون

$$TD(g)v = D'(g)Tv = 0.$$

به‌همین ترتیب تصویر $R(T) = T(V)$ تحت D' ناورداست. اگر $T \neq 0$، تحویل‌ناپذیری حکم می‌کند $N(T) = \{0\}$ و $R(T) = V'$. بنابراین T یک‌به‌یک و پوشا، و در نتیجه وارون‌پذیر است. $\square$

لم دوم شور. اگر $V = V'$ و $D = D'$ یک بازنمایی تحویل‌ناپذیرِ متناهی‌بُعد روی $\mathbb{C}$ باشد، هر T که با تمام $D(g)$ها جابه‌جا شود، از شکل

$$T = \lambda I$$

است. برای اثبات، یک مقدار ویژهٔ λ از T انتخاب کنید. عملگر $T - \lambda I$ هم میان‌باف است و هم هستهٔ ناصفر دارد؛ پس به حکم بخش نخست، باید صفر باشد.

۱.۱۳.۱ یکتایی تجزیهٔ کامل تا حدِ چندگانگی

اگر یک بازنمایی به‌دو روش به فضاهای تحویل‌ناپذیر تجزیه شده باشد، نگاشت «گرفتن مؤلفهٔ یک بردار در زیرفضای تجزیهٔ دوم» میان‌باف است. لم شور می‌گوید این نگاشت میان دو جزء نامعادل صفر است. پس فقط مؤلفه‌های معادلِ دو تجزیه با هم ارتباط دارند. نتیجه این است که **گونه‌های تحویل‌ناپذیر** و **تعداد تکرارِ هر گونه** یکتا هستند، هرچند انتخاب زیرفضاهای متناظر، در حضورِ چندگانگی ممکن است یکتا نباشد.

اگر بازنمایی را به‌صورت

$$V = \bigoplus_{\alpha} \left(\mathbb{C}^{m_\alpha} \otimes V_\alpha \right)$$

بنویسیم، V_α بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیر نامعادل و m_α تعداد تکرارشان است. جمع همهٔ اجزایی که از یک گونهٔ α هستند، **بخش ایزوتیپی** آن گونه نام دارد و مستقل از روشِ تجزیه است.

مثال حل‌شده: از لم شور تا ساختار یک هامیلتونیِ متقارن

فرض کنید $U(g)$ یک بازنمایی تحویل‌ناپذیرِ مختلط و H هامیلتونیِ متقارن تحت گروه باشد، یعنی $[H, U(g)] = ۰$ برای هر g.
گام ۱. طبق لم شور، $H = EI$ روی این زیرفضا.
گام ۲. اگر H هرمیتی باشد، $E \in \mathbb{R}$. بنابراین همهٔ حالت‌های این زیرفضای d بُعدی دارای انرژی یکسان‌اند: تبهگنیِ تقارنی دست‌کم d است.
گام ۳. اگر یک بازنمایی تحویل‌ناپذیر m بار تکرار شود، شکل عمومی هامیلتونی روی بخش متناظر $H = A_m \otimes I_d$ است؛ لذا تقارن، ترکیب بین کپی‌های معادل را مجاز می‌گذارد، ولی در نمایه‌های داخلیِ بازنمایی تحویل‌ناپذیر با ماتریس یکانی عمل می‌کند.

یادداشت تاریخی: ایسای شور؛ از ریاضیات ناب تا مکانیک کوانتومی

ایسای شور شاگرد فروبنیوس بود و در فاصلهٔ حدود 1904–1907 بر بازنمایی‌ها و کاراکترهای گروهی کار کرد؛ «لم شور» از آن دوران برآمد. با پیدایش مکانیک کوانتومی در دههٔ 1920، نظریه‌ای که در ابتدا بسیار انتزاعی به نظر می‌رسید به زبان طبیعیِ تبهگنی انرژی و قواعد گزینش بدل شد. (منبع: زندگی‌نامهٔ شور در MacTutor.)

۲.۱۳.۱ میانگین‌گیری روی گروه و رابطه‌های تعامد

برای گروه متناهی، میانگین تابع $f : G \to \mathbb{C}$ را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}(f) = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

این عملگر خطی، مثبت برای توابع نامنفی، نرمال‌شده ($\mathcal{M}(۱) = ۱$)، و تحت انتقال چپ، راست و وارون‌گرفتن ناورداست. می‌توان همین میانگین‌گیری را روی عملگرهای خطی نیز انجام داد.

اگر D و D' تحویل‌ناپذیر باشند و $S : V \to V'$ هر نگاشت خطی، تعریف کنید

$$T_S = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} D'(g^{-۱}) S D(g).$$

با جایگزینی $g \mapsto gh$ نشان می‌دهیم $T_S D(h) = D'(h) T_S$. پس T_S یک میان‌باف است. اگر D و D' نامعادل باشند، لم شور حکم می‌کند $T_S = ۰$. اگر $D' = D$، داریم $T_S = c(S) I$؛ گرفتن رد نشان می‌دهد $c(S) = \operatorname{Tr} S / d$، که $d = \dim V$ است.

برای بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیر یکانیِ نامعادل $D^{(\alpha)}$ و $D^{(\beta)}$، و $d_\alpha = \dim D^{(\alpha)}$، با انتخاب S به‌شکل یک ماتریس تک‌درایه و مقایسهٔ درایه‌ها به رابطهٔ تعامد بزرگ می‌رسیم:

$$\boxed{\frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} D^{(\alpha)}_{ij}(g)^{*} D^{(\beta)}_{k\ell}(g) = \frac{\delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{j\ell}}{d_\alpha}.}$$

برای توابع روی گروه، ضرب داخلی $\langle f, h \rangle = \frac{۱}{|G|} \sum_g f(g)^{*} h(g)$ را در نظر می‌گیریم. تعامدِ درایه‌ها یعنی

توابعِ $\sqrt{d_\alpha}\, D^{(\alpha)}_{ij}(g)$ متعامدهنجارند. از آنجا که فضای $L^2(G)$ بُعد $|G|$ دارد، در ابتدا می‌فهمیم

$$\sum_{\alpha} d_\alpha^2 \le |G|.$$

با جمع‌کردن روی نمایه‌های قطری، **رابطهٔ تعامدِ کاراکترها** حاصل می‌شود:

$$\boxed{\langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g} \chi_\alpha(g)^* \chi_\beta(g) = \delta_{\alpha\beta}.}$$

ازآنجاکه کاراکترها تابع کلاسی‌اند، تعداد بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیرِ نامعادل، حداکثر تعداد کلاس‌های مزدوج است. اگر

$$\chi_D = \sum_{\alpha} m_\alpha \chi_\alpha,$$

آنگاه $m_\alpha = \langle \chi_\alpha, \chi_D \rangle$ و $\langle \chi_D, \chi_D \rangle = \sum_\alpha m_\alpha^2$. بنابراین برای بازنمایی ناصفر، D زمانی تحویل‌ناپذیر است که $\langle \chi_D, \chi_D \rangle = 1$.

مثال حل‌شده: جدول کاراکتر کاملِ S_3 را به‌دست آوریم

سه کلاس مزدوج C_e, C_t, C_c به اندازه‌های $1, 3, 2$ داریم. به همین تعداد باید بازنمایی تحویل‌ناپذیر داشته باشیم. دو بازنمایی یک‌بُعدی روشن‌اند: بدیهی با کاراکتر $(1,1,1)$، و علامت با $(1,-1,1)$. شرط مجموع مربعات ابعاد می‌دهد

$$1^2 + 1^2 + d^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad d = 2.$$

بازنمایی جایگشتیِ سه‌بُعدیِ بخش قبل، جمعِ بدیهی و استانداردِ دوبُعدی بود؛ پس کاراکتر استاندارد از $(2,0,-1) = (3,1,0) - (1,1,1)$ به‌دست می‌آید.

کلاس	$[e]$	$[(12)]$	$[(123)]$
اندازه	1	3	2
χ_1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1
χ_2	2	0	-1

مثلاً تعامدِ بدیهی و استاندارد را مستقیم بررسی کنید:

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1(1)(2) + 3(1)(0) + 2(1)(-1)}{6} = 0.$$

و نرمِ استاندارد:

$$\|\chi_2\|^2 = \frac{1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1}{6} = 1.$$

پس بازنمایی استاندارد واقعاً تحویل‌ناپذیر است.

۳.۱۳.۱ بازنمایی‌های منتظم چپ و راست

روی فضای توابع $L^۲(G)$، با پایهٔ $\{|h\rangle : h \in G\}$، دو بازنمایی تعریف می‌کنیم:

$$(L_g f)(h) = f(g^{-۱}h), \qquad (R_g f)(h) = f(hg).$$

هر دو یکانی‌اند، $L_g R_k = R_k L_g$، و روی پایه‌ها

$$L_g|h\rangle = |gh\rangle, \qquad R_g|h\rangle = |hg^{-۱}\rangle.$$

زیرا اگر $g \neq e$، هیچ بردار پایه‌ای تحتِ جابه‌جایی چپ یا راست در جای خود نمی‌ماند، کاراکتر هر دو بازنمایی منتظم برابر است با

$$\chi_{\mathrm{reg}}(g) = |G|\,\delta_{g,e}.$$

چندگانگی بازنمایی تحویل‌ناپذیر α در بازنمایی منتظم از ضرب داخلیِ کاراکترها حساب می‌شود:

$$m_\alpha = \langle \chi_\alpha, \chi_{\mathrm{reg}} \rangle = \chi_\alpha(e) = d_\alpha.$$

پس هر بازنمایی تحویل‌ناپذیرِ d_α بُعدی دقیقاً d_α بار در بازنمایی منتظم ظاهر می‌شود؛ نتیجه:

$$\boxed{\sum_\alpha d_\alpha^{۲} = |G|.}$$

در نتیجه توابع $\sqrt{d_\alpha}\,D^{(\alpha)}_{ij}(g)$ یک پایهٔ متعامدهنجارِ کامل برای $L^۲(G)$ تشکیل می‌دهند. هر تابع به‌صورت

$$f(g) = \sum_\alpha \sum_{i,j} c^{(\alpha)}_{ij} \sqrt{d_\alpha} D^{(\alpha)}_{ij}(g), \qquad c^{(\alpha)}_{ij} = \big\langle \sqrt{d_\alpha} D^{(\alpha)}_{ij}, f \big\rangle$$

بسط می‌یابد و $\|f\|^۲ = \sum_{\alpha,i,j} |c^{(\alpha)}_{ij}|^۲$. عملگرهای L و R روی دو نمایهٔ متفاوت این ضرایب اثر می‌گذارند؛ این با جابه‌جاشدنشان سازگار است. اگر f تابع کلاسی باشد، این بسط به

$$f(g) = \sum_\alpha f_\alpha \chi_\alpha(g), \qquad f_\alpha = \langle \chi_\alpha, f \rangle$$

کاهش می‌یابد. از کامل‌بودن کاراکترها، نتیجهٔ اساسی دیگر حاصل می‌شود:

$$\boxed{\#\{\text{بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیرِ نامعادل}\} = \#\{\text{کلاس‌های مزدوج}\}.}$$

مثال حل‌شده: بازنمایی منتظم $S_۳$: چرا عدد شش دوباره پیدا می‌شود؟

طبق جدول پیشین، $S_۳$ دو بازنمایی یک‌بُعدی و یک بازنمایی دوبُعدی دارد. بازنمایی منتظم شش‌بُعدی است و طبق فرمولِ چندگانگی:

$$D_{\mathrm{reg}} \cong ۱ \oplus \mathrm{sgn} \oplus ۲ \oplus ۲.$$

بُعد سمت راست $۱ + ۱ + ۲ + ۲ = ۶$ است. در سطح کاراکترها:

$$\chi_{\mathrm{reg}} = (۱,۱,۱) + (۱,-۱,۱) + ۲(۲,۰,-۱) = (۶,۰,۰).$$

پس $\chi_{\text{reg}}(e) = ۶$ و در سایر عناصر صفر است؛ در این محاسبه دو قضیهٔ مستقل به هم می‌رسند.

مثال حل‌شده: فوریه روی یک گروه دوری؛ صورت گسستهٔ یک اندیشهٔ بزرگ

برای $G = \mathbb{Z}_n$، همهٔ بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیرِ مختلط یک‌بُعدی‌اند:

$$\chi_k(m) = e^{۲\pi i k m/n}, \qquad k, m = ۰, \dots, n-۱.$$

تعامد را مستقیم محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{n}\sum_{m=۰}^{n-۱} \chi_k(m)^* \chi_\ell(m) = \frac{۱}{n}\sum_{m=۰}^{n-۱} e^{۲\pi i(\ell-k)m/n} = \delta_{k\ell}.$$

اگر $k \neq \ell$، مجموع یک تصاعد هندسی با نسبتِ $z \neq ۱$ و $z^n = ۱$ است، پس صفر می‌شود. بنابراین بسط یک تابع دلخواه $f(m)$ روی $\mathbb{Z}_n$، همان تبدیل فوریهٔ گسسته است:

$$\widehat{f}(k) = \frac{۱}{n}\sum_{m} f(m) e^{-۲\pi i k m/n}, \quad f(m) = \sum_{k} \widehat{f}(k) e^{۲\pi i k m/n}.$$

یعنی تحلیل فوریه، نظریهٔ بازنماییِ گروه‌های آبلی در لباسِ آشنای پردازش سیگنال است.

۴.۱۳.۱ مزدوج مختلط؛ بازنمایی حقیقی، مختلط و شبه‌حقیقی

اگر $D^{(\alpha)}$ تحویل‌ناپذیر و یکانی باشد، $D^{(\alpha)*}$ نیز چنین است. اگر کاراکتر $\chi_\alpha(g)$ برای بعضی عناصر حقیقی نباشد، بازنماییِ مزدوج مختلط با خودِ آن نامعادل است و بازنمایی از نوع مختلط است. اگر کاراکتر همه‌جا حقیقی باشد، مزدوج مختلط با خودِ بازنمایی معادل است؛ اما دو حالت متفاوت ممکن است:

- حقیقی: می‌توان پایه‌ای انتخاب کرد که همهٔ ماتریس‌های بازنمایی حقیقی باشند.
- شبه‌حقیقی **(شبه‌واقعی)**: بازنمایی معادلِ مزدوج مختلط خود است، ولی هیچ پایهٔ یکانی‌ای همهٔ ماتریس‌ها را به‌طور هم‌زمان حقیقی نمی‌کند.

در حالتِ کاراکتر حقیقی، یک ماتریس یکانیِ میان‌باف C وجود دارد که $D(g)^* = C D(g) C^{-۱}$. به کمک لم شور می‌توان آن را چنان تنظیم کرد که $C^T = \pm C$؛ علامتِ مثبت حالت حقیقی و علامتِ منفی حالت شبه‌حقیقی را مشخص می‌کند. یک آزمون تکمیلی، **شاخص فروبنیوس ـ شور** است:

$$\nu_\alpha = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_\alpha(g^۲) \in \{+۱, ۰, -۱\},$$

که به‌ترتیب حالت‌های حقیقی، مختلط و شبه‌حقیقی را تشخیص می‌دهد.

مثال حل‌شده: یک بازنمایی شبه‌حقیقی با ماتریس‌های پائولی

گروه کواترنیون $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ را در بازنمایی دوبُعدی

$$D(1) = I_2, \quad D(-1) = -I_2, \quad D(i) = i\sigma_x, \quad D(j) = i\sigma_y, \quad D(k) = -i\sigma_z$$

در نظر بگیرید. قرارداد علامت‌ها طوری است که $D(i)D(j) = D(k)$ و $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.
ردها عبارت‌اند از $\chi(1) = 2$، $\chi(-1) = -2$، و $\chi(\pm i) = \chi(\pm j) = \chi(\pm k) = 0$.
گام ۱. مربعِ دو عضوِ ± 1 برابر ۱ است.
گام ۲. مربع هر یک از شش عضوِ $\pm i, \pm j, \pm k$ برابر -1 است.
گام ۳. شاخص را محاسبه می‌کنیم:

$$\nu = \frac{1}{8}\left[2\chi(1) + 6\chi(-1)\right] = \frac{1}{8}(4 - 12) = -1.$$

پس این بازنمایی شبه‌حقیقی است؛ واقعی‌بودنِ کاراکترها به‌تنهایی برای یافتنِ پایهٔ کاملاً حقیقی کافی نیست.

۵.۱۳.۱ حاصل‌ضرب بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیر؛ مسئلهٔ کلبش ـ گوردان

اگر $D^{(\alpha)}$ و $D^{(\beta)}$ تحویل‌ناپذیر باشند، ضرب تانسوریِ آن‌ها عموماً تحویل‌پذیر است:

$$D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} \cong \bigoplus_{\gamma} N_{\alpha\beta}^{\ \gamma} D^{(\gamma)}, \qquad N_{\alpha\beta}^{\ \gamma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

ضرایب چندگانگی بدون ساختن ماتریس‌های بزرگ به‌دست می‌آیند:

$$\boxed{N_{\alpha\beta}^{\ \gamma} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_\gamma(g)^{*}\chi_\alpha(g)\chi_\beta(g).}$$

پایه‌ای که ضرب تانسوری را به بلوک‌های تحویل‌ناپذیر تبدیل می‌کند با ضرایب کلبش ـ گوردان بیان می‌شود؛ این ضرایب به قراردادِ پایه و فاز وابسته‌اند.

مثال حل‌شده: محاسبهٔ کاملِ $2 \otimes 2$ در S_3

از جدول کاراکترها، $\chi_2 = (2, 0, -1)$. پس کاراکتر ضرب تانسوری آن با خودش

$$\chi_{2\otimes 2} = (2, 0, -1)^2 = (4, 0, 1).$$

ضرایب را با وزنِ اندازهٔ کلاس‌ها $(1, 3, 2)$ حساب می‌کنیم:

$$N_{22}^{1} = \tfrac{1}{6}(1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1) = 1,$$

$$N_{22}^{\mathrm{sgn}} = \tfrac{1}{6}(1\cdot 4 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1) = 1,$$

$$N_{22}^{2} = \tfrac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 0 + 2\cdot(-1)\cdot 1) = 1.$$

بنابراین

$$\boxed{۲ \otimes ۲ = ۱ \oplus \mathrm{sgn} \oplus ۲,}$$

و ابعاد نیز سازگارند: $۲ + ۱ + ۱ = ۲ \times ۲$. در یک گروه آبلی، تمام بازنمایی‌های تحویل‌ناپذیرِ مختلط یک‌بُعدی‌اند؛ در یک گروه ناجابجایی، دست‌کم یکی از آن‌ها چندبُعدی است.

یادداشت تاریخی: نام دو ریاضی‌دان و مسئلهٔ اتصال اسپین‌ها

آلفرد کلبش و پاول گوردان در سدهٔ نوزدهم به مسائل نظریهٔ ناورداها و ترکیب بازنمایی‌های جبری می‌پرداختند، دهه‌ها پیش از صورت‌بندیِ مکانیک کوانتومی. پس از ظهور فیزیک کوانتومی روشن شد دستگاه محاسباتیِ آنان برای ترکیب تکانه‌های زاویه‌ای دقیقاً همان چیزی است که فیزیک‌دانان نیاز دارند. (نگاه کنید به مرور تاریخی Angular Momentum Diagrams.)

۱۴.۱ جبر گروه

اگر G گروهی متناهی و $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، **جبر گروه** $\mathbb{F}[G]$ مجموعهٔ تمام ترکیب‌های خطی صوریِ عناصر گروه است:

$$\mathbb{F}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \, g : a_g \in \mathbb{F} \right\}.$$

این ساختار از سه زاویه دیده می‌شود: نخست، یک **فضای برداری** روی $\mathbb{F}$ با پایهٔ عناصر گروه و بُعد $|G|$ است؛ دوم، یک **حلقهٔ** دارای یکه است که ضرب آن با استفاده از قانون ضربِ G و توزیع‌پذیری تعریف می‌شود؛ سوم، با ضربِ اسکالر از $\mathbb{F}$، یک **جبر روی میدان** $\mathbb{F}$ است. برای

$$a = \sum_{g} a_g g, \qquad b = \sum_{h} b_h h$$

داریم

$$ab = \sum_{g,h \in G} a_g b_h (gh).$$

یکهٔ این جبر همان $۱_{\mathbb{F}} e_G$ است. اگر گروه آبلی باشد، جبر گروه جابه‌جایی است؛ اگر نباشد، جبر گروه نیز ناجابجایی است. میدان $\mathbb{F}$ را می‌توان با شناسایی $c \leftrightarrow c\, e_G$ زیرمجموعه‌ای از جبر دانست.

مثال حل‌شده: جبر گروه $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_۲]$: از ضرب صوری تا تصویرگرهای واقعی

بگذارید $\mathbb{Z}_۲ = \{e, s\}$ با $s^۲ = e$. هر عنصرِ جبر به صورت $a = xe + ys$ است و

$$(xe + ys)(ue + vs) = (xu + yv)e + (xv + yu)s.$$

دو عنصر ویژه را تعریف می‌کنیم:

$$p_+ = \frac{e + s}{۲}, \qquad p_- = \frac{e - s}{۲}.$$

گام ۱. با بسطِ مربع:

$$p_+^2 = \frac{e + 2s + s^2}{4} = \frac{e+s}{2} = p_+, \quad p_-^2 = p_-.$$

گام ۲. حاصل‌ضرب $p_+ p_- = (e - s^2)/4 = 0$، و $p_+ + p_- = e$.
گام ۳. بنابراین $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2] = \mathbb{C}p_+ \oplus \mathbb{C}p_-$. هر یک از این دو راستا یک بازنمایی یک‌بُعدی را می‌سازد: $sp_+ = p_+$، و $sp_- = -p_-$. جبر گروه، هر دو بازنمایی تحویل‌ناپذیر را در درون خود جای داده است.

پیوند با فیزیک: پروژکتور تقارن در مکانیک کوانتومی

اگر $U(s)^2 = I$ عملگر وارونگی یا پاریته باشد، عملگرهای

$$P_\pm = \frac{I \pm U(s)}{2}$$

تصویرگرهای متعامدی بر فضاهای زوج و فردند. آنچه در جبر گروه به‌صورت $p_\pm$ نوشته شد، پس از اعمال بازنمایی D دقیقاً به این پروژکتورهای آشنای کوانتومی تبدیل می‌شود.

۱۵.۱ بازنمایی‌های گروه و مدول‌های جبر گروه

بازنمایی D از G روی V، یک عمل طبیعی از جبر $\mathbb{F}[G]$ روی بردارهای V تعریف می‌کند:

$$\left(\sum_i a_i g_i\right) \cdot v = \sum_i a_i D(g_i) v.$$

از این دیدگاه V یک **مدول چپ** روی حلقهٔ $\mathbb{F}[G]$ است. «مدول» تعمیم فضای برداری است، با این تفاوت که ضرایب به‌جای آنکه فقط از یک میدان بیایند، از یک حلقه می‌آیند. هر زیر فضایِ ناوردا زیرمدول است؛ و بازنمایی تحویل‌ناپذیر با مدولِ ساده متناظر می‌شود.

در جبر گروه، عنصری p را **خودتوان** می‌گوییم اگر $p^2 = p$. دو خودتوان p, q را **متعامد** می‌خوانیم اگر $pq = qp = 0$. خودتوانِ اولیه را نمی‌توان به جمع دو خودتوان متعامدِ ناصفر شکست. تصویرگرهای جبری در تجزیهٔ بازنمایی منتظم و ساخت مدول‌های تحویل‌ناپذیر نقش کلیدی دارند؛ این روش در فصل بعد برای S_n اهمیت پیدا می‌کند. بحث حاضر برای میدان عمومی $\mathbb{F}$ تعریف‌پذیر است، ولی در بخش‌های بعدی کتاب عمدتاً $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ انتخاب می‌شود.

یادداشت آموزشی و ویرایشی: یک شرط فنیِ مهم که نباید پنهان بماند

تجزیهٔ هر بازنمایی به مجموعی از مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر و روشِ ساخت آن‌ها به‌وسیلهٔ خودتوان‌ها، در حالت نیمه‌سادهٔ جبر گروه به‌خوبی کار می‌کند؛ برای گروه متناهی، این امر وقتی برقرار باشد تضمین می‌شود. در میدان‌هایی که مشخصه‌شان مرتبهٔ گروه را تقسیم می‌کند، تجزیهٔ کامل ممکن است شکست بخورد. این قید، بسطی دقیق‌تر بر مبحث فشردهٔ متن مبدأ

است.

مثال حل‌شده: تصویرگرِ یک بازنمایی تحویل‌ناپذیر را از کاراکتر بسازیم

برای گروه متناهی روی $\mathbb{C}$، اگر χ_α کاراکتر بازنمایی تحویل‌ناپذیرِ d_α بُعدی باشد، عنصر مرکزیِ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$p_\alpha = \frac{d_\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g^{-1})\, g.$$

گام ۱. چون $\chi_\alpha(hgh^{-1}) = \chi_\alpha(g)$، مزدوج‌کردن با هر h این مجموع را عوض نمی‌کند؛ بنابراین p_α مرکزی است.
گام ۲. تصویر آن در بازنمایی تحویل‌ناپذیرِ β چنین است:

$$D^{(\beta)}(p_\alpha) = \frac{d_\alpha}{|G|} \sum_{g} \chi_\alpha(g)^{*} D^{(\beta)}(g).$$

این ماتریس با همهٔ $D^{(\beta)}(h)$ها جابه‌جا می‌شود، پس با لم شور cI است. با گرفتن رد و تعامد کاراکترها:

$$c\, d_\beta = d_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

ازآنجاکه وقتی $\alpha = \beta$ ابعاد برابرند، $c = \delta_{\alpha\beta}$. بنابراین p_α روی گونهٔ α مانند همانی و روی همهٔ گونه‌های دیگر مانند صفر عمل می‌کند.
گام ۳. از کامل‌بودن بازنمایی منتظم نتیجه می‌شود

$$p_\alpha p_\beta = \delta_{\alpha\beta} p_\alpha, \qquad \sum_{\alpha} p_\alpha = e_G.$$

پس این فرمول، تصویرگرهای مرکزیِ متعامد را مستقیماً از کاراکترها به‌دست می‌دهد. توجه کنید p_α برای $d_\alpha > ۱$ معمولاً مرکزیِ اولیه است، نه الزاماً خودتوانِ اولیهٔ نامرکزی.

مثال حل‌شده: چرا مشخصهٔ میدان مهم است؟

گروه $\mathbb{Z}_۲ = \{e, s\}$ را این‌بار روی میدان $\mathbb{F}_۲$ با دو عنصر $۰, ۱$ در نظر بگیرید. چون $-۱ = ۱$ در این میدان، پروژکتورهای $(e \pm s)/۲$ اصلاً تعریف نمی‌شوند؛ تقسیم بر ۲ ممکن نیست.
در بازنمایی دوبُعدی $D(s) = \left(\begin{smallmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{smallmatrix}\right)$، داریم

$$D(s)^۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = I_۲ \qquad \text{در مشخصهٔ ۲.}$$

خطِ $\langle e_۱ \rangle$ ناورداست، ولی دقیقاً مانند مثالِ بازنماییِ انتقال، هیچ مکملِ ناوردایی ندارد. پس قضیهٔ تجزیهٔ کامل در این میدان شکست می‌خورد. این مثال، دلیل ریاضیِ قید $\operatorname{char} \mathbb{F} \nmid |G|$ را ملموس می‌کند.

مسائل پایان فصلِ کتاب و حل تشریحی آن‌ها

در کتاب اصلی پنج مسئله با شماره‌های P1.1–P1.5 آمده است. در این نسخه، صورتِ فارسیِ همهٔ آن‌ها همراه با راه‌حلِ مرحله‌به‌مرحله آمده تا خواننده ابزارهای پیشین را در عمل به‌کار گیرد.

مثال حل‌شده: P1.1 ـ از همانیِ چپ و وارونِ چپ تا گروه کامل

صورت مسئله. فرض کنید عمل دوتایی شرکت‌پذیر است، $ea = a$، و برای هر a عضوی b وجود دارد که $ba = e$. ثابت کنید $ae = a$ و $ab = e$.

گام ۱. برای b نیز وارون چپی مانند c وجود دارد که $cb = e$.

گام ۲. با شرکت‌پذیری:

$$a = ea = (cb)a = c(ba) = ce = c.$$

دقت کنید در این گام، هنوز $ce = c$ را نمی‌دانیم و نوشتنِ آن مجاز نیست! بنابراین این مسیر را اصلاح می‌کنیم: از $cb = e$ و $ba = e$ نتیجه می‌گیریم

$$a = ea = (cb)a = c(ba) = ce.$$

گام ۳. اکنون $ab = (ce)b = c(eb) = cb = e$، زیرا $eb = b$. پس همان b وارون راست نیز هست.

گام ۴. با استفاده از $ab = ba = e$ داریم $ae = a(ba) = (ab)a = ea = a$. بنابراین همانی و وارون‌ها دوطرفه‌اند. یکتاییِ همانی و وارون از قواعد استانداردِ حذف به‌دست می‌آید.

مثال حل‌شده: P1.2 ـ چرا گروهی با مرتبهٔ اول ساده است؟

صورت مسئله. ثابت کنید گروه متناهیِ G با $|G| = p$ (عدد اول) هیچ زیرگروه نابدیهیِ سره‌ای ندارد.

گام ۱. برای هر زیرگروه $H \le G$، قضیهٔ لاگرانژ می‌گوید $|H| \mid p$.

گام ۲. تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت p، اعداد ۱ و p هستند. اگر $|H| = 1$، آنگاه $H = \{e\}$؛ اگر $|H| = p$، آنگاه $H = G$.

نتیجه. زیرگروه سرهٔ نابدیهی وجود ندارد. افزون بر این، هر $a \neq e$ مرتبهٔ p دارد و $G = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_p$. پس هر گروه با مرتبهٔ اول، دوری و آبلی است.

مثال حل‌شده: P1.3 ـ کوچک‌ترین خارج‌قسمتی آبلی

صورت مسئله. اگر $H \trianglelefteq G$ و G/H آبلی باشد، نشان دهید $G' \subseteq H$.

گام ۱. نگاشت خارج‌قسمتی $\pi : G \to G/H$، $\pi(g) = gH$، یک همریختی است.

گام ۲. برای هر $a, b \in G$:

$$\pi([a,b]) = \pi(a)\pi(b)\pi(a)^{-1}\pi(b)^{-1} = e_{G/H},$$

زیرا G/H آبلی است.

گام ۳. پس هر جابه‌جاساز در $\ker \pi = H$ است؛ حاصل‌ضرب هر تعداد از آن‌ها نیز در H می‌ماند. بنابراین زیرگروهی که همهٔ آن‌ها تولید می‌کنند، یعنی G'، در H قرار دارد.

مثال حل‌شده: P1.4 ـ بازنمایی گروه انتقال در یک بُعد

صورت مسئله. برای تبدیل‌های $x \mapsto x + a$، ثابت کنید

$$a \longmapsto D(a) = \begin{pmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

یک بازنمایی است و نوع تحویل‌پذیری آن را مشخص کنید.
گام ۱. محاسبهٔ ضرب:

$$D(a)D(b) = \begin{pmatrix} ۱ & a+b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = D(a+b),$$

و $D(۰) = I$، $D(a)^{-۱} = D(-a)$.
گام ۲. $\mathrm{span}\{e_۱\}$ ناورداست، پس بازنمایی تحویل‌پذیر است.
گام ۳. اگر خط مکملِ ناوردایی با مولد $v = (x, y)^T$ وجود داشته باشد، باید $y \neq ۰$ و $D(a)v = \lambda(a)v$. از مؤلفهٔ دوم $\lambda(a) = ۱$، و از اول $ay = ۰$ برای تمام a نتیجه می‌شود؛ تناقض.
نتیجه. این بازنماییِ دوبُعدی، تحویل‌پذیر ولی تجزیه‌ناپذیر است؛ در نتیجه با هیچ ضرب داخلیِ مثبت‌معینی نمی‌تواند به‌طور هم‌زمان برای تمام انتقال‌ها یکانی شود.

مثال حل‌شده: P1.5 ـ مدارها، پایدارسازها و لم شمارش مدارها

صورت مسئله. گروه متناهی G روی مجموعهٔ متناهی X عمل می‌کند. ثابت کنید:

(آ) اگر $y = g \cdot x$، آنگاه $H_y = g H_x g^{-۱}$.

(ب) مجموعهٔ مدار $\mathcal{O}(x)$ با مجموعهٔ هم‌دسته‌های G/H_x متناظر یک‌به‌یک است.

(ج) تعداد مدارها برابر $\frac{۱}{|G|}\sum_g |X^g|$ است.

حل **(الف)**. $h \in H_y$ اگر و تنها اگر $h(gx) = gx$، یا معادل آن $(g^{-۱}hg)x = x$. بنابراین $h \in gH_xg^{-۱}$، و تساوی اثبات می‌شود.
حل **(ب)**. نگاشت $\Phi : G/H_x \to \mathcal{O}(x)$ را با $\Phi(gH_x) = gx$ تعریف کنید. اگر $gH_x = g'H_x$، آنگاه $g'^{-۱}g \in H_x$ و $gx = g'x$؛ پس نگاشت خوش‌تعریف است. همین استدلال در جهت عکس، تزریق‌بودن را نشان می‌دهد؛ پوشابودن از تعریف مدار پیداست. لذا $|\mathcal{O}(x)| = |G|/|H_x|$.
حل **(ج)**. مجموعهٔ زوج‌های ثابت‌گذار را به دو روش می‌شماریم:

$$\mathcal{P} = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}.$$

اگر اول g را ثابت بگیریم، $|\mathcal{P}| = \sum_g |X^g|$. اگر اول x را ثابت بگیریم، $|\mathcal{P}| = \sum_x |H_x|$. این مجموع را مداربه‌مدار گروه‌بندی می‌کنیم؛ در یک مدار $\mathcal{O}$، اندازهٔ پایدارسازها برابر و $|\mathcal{O}|\,|H_x| = |G|$

$|G|$ است. پس هر مدار دقیقاً $|G|$ به مجموع می‌افزاید. بنابراین

$$\#\text{مدارها} = \frac{۱}{|G|}\sum_{g}|X^g|. \qquad \sum_{g}|X^g| = (\#\text{مدارها})\,|G|,$$

چالش‌های تکمیلیِ محاسباتی برای دانشجوی فیزیک

این مسائل افزودهٔ آموزشی هستند و در متن مبدأ نیامده‌اند. هدف آن‌ها استفادهٔ ترکیبی از چند ایدهٔ فصل است.

مثال حل‌شده: چالش ۱ ـ چهار مکان روی یک حلقه؛ مودهای نرمال را پیدا کنید

چهار جرم برابر را در چهار رأس یک مربع و با شرایط مرزی دوره‌ای تصور کنید. عمل انتقال یک خانه‌ای را با $Te_j = e_{j+۱ \pmod ۴}$ تعریف می‌کنیم. $T^۴ = I$، پس T نمایندهٔ مولدِ $\mathbb{Z}_۴$ است.
گام ۱. بردار فوریه‌ای $v^{(k)} = (۱, \omega^k, \omega^{۲k}, \omega^{۳k})^T$، $\omega = e^{۲\pi i/۴} = i$ را بسازید.
گام ۲. از $(Tv)_j = v_{j-۱}$ به‌دست می‌آید $Tv^{(k)} = \omega^{-k}v^{(k)}$.
گام ۳. اگر ماتریس نیرو $K = \kappa(۲I - T - T^{-۱})$ باشد، همان بردارها مودهای نرمال‌اند و

$$Kv^{(k)} = \kappa(۲ - \omega^k - \omega^{-k})v^{(k)} = ۴\kappa\sin^۲\!\left(\frac{\pi k}{۴}\right)v^{(k)}.$$

برای جرم m، فرکانس‌ها $\Omega_k = ۲\sqrt{\kappa/m}\,|\sin(\pi k/۴)|$ هستند؛ دو مود $k = ۱, ۳$ هم‌فرکانس‌اند. این محاسبه نمونه‌ای ملموس از ارتباط گروه دوری و طیف نوسانگرهای شبکه‌ای است.

مثال حل‌شده: چالش ۲ ـ آزمون تحویل‌ناپذیری فقط با ردها

فرض کنید بازنمایی چهاربُعدیِ $S_۴$ کاراکتر $\chi = (۴, ۰, ۱, ۰)$ روی سه کلاسِ e، ترانهاده، دور سه‌تایی داشته باشد. آن را تجزیه کنید.
گام ۱. با جدول کاراکترها:

$$m_{۱} = \frac{۴ + ۰ + ۲}{۶} = ۱, \quad m_{\mathrm{sgn}} = \frac{۴ + ۰ + ۲}{۶} = ۱,$$

$$m_{۲} = \frac{۸ + ۰ - ۲}{۶} = ۱.$$

گام ۲. جمع ابعاد $۴ = ۲ + ۱ + ۱$ است، پس هیچ جزء گم نشده است.
نتیجه. $D \cong ۱ \oplus \mathrm{sgn} \oplus ۲$. همچنین $\|\chi\|^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ = ۳ > ۱$، پس تحویل‌پذیر است. جالب اینکه همین کاراکتر، در مسئلهٔ $۲ \otimes ۲$ به‌دست آمد.

مثال حل‌شده: چالش ۳ ـ شمارش گردنبند با چهار مهرهٔ دورنگ

چهار مهرهٔ سیاه و سفید روی یک حلقه قرار گرفته‌اند و فقط دوران‌ها، نه بازتاب‌ها، معادل شمرده می‌شوند. گروه $C_۴ = \{e, r, r^۲, r^۳\}$ عمل می‌کند.
گام ۱. همانی $۱۶ = ۲^۴$ حالت را ثابت می‌گذارد.
گام ۲. دورانِ یک‌خانه‌ای یا سه‌خانه‌ای، تنها دو حالتِ یک‌رنگ را ثابت می‌گذارد: هر کدام ۲ حالت.
گام ۳. دورانِ دوخانه‌ای دو چرخهٔ مستقل (۱۳) و (۲۴) دارد؛ هر چرخه می‌تواند مستقل از دیگری یک رنگ بگیرد، پس $۴ = ۲^۲$ حالت ثابت دارد.
گام ۴. لم کوشی ـ فروبنیوس می‌دهد

$$N = \frac{۱۶ + ۲ + ۴ + ۲}{۴} = ۶.$$

اگر بازتاب‌ها را نیز مجاز کنیم، باید گروه بزرگ‌تر $D_۴$ را به‌کار بریم و پاسخ عوض می‌شود؛ تعریف دقیق «چه‌چیزی را یکی می‌شماریم» بخشی از فیزیک مسئله است.

مثال حل‌شده: چالش ۴ ـ پروژکتورهای مرکزی $S_۳$ از کجا می‌آیند؟

سه کلاسِ $S_۳$ را داریم. با فرمول بخش جبر گروه، برای بازنمایی بدیهی و علامت:

$$p_۱ = \frac{۱}{۶}\sum_{g \in S_۳} g, \qquad p_{\mathrm{sgn}} = \frac{۱}{۶}\sum_{g \in S_۳} \mathrm{sgn}(g)\, g.$$

برای بازنمایی دوبُعدی استاندارد، چون $d_۲ = ۲$ و کاراکتر روی کلاس‌ها $(۲, ۰, -۱)$ است:

$$p_۲ = \frac{۲}{۶}\Big(۲e - (۱۲۳) - (۱۳۲)\Big) = \frac{۱}{۳}\Big(۲e - (۱۲۳) - (۱۳۲)\Big).$$

وارسی. اگر سه فرمول را جمع کنیم، ضریب e برابر $۱ = ۲/۳ + ۱/۶ + ۱/۶$ است؛ ضریب هر ترانهاده $۰ = ۰ + ۱/۶ - ۱/۶$، و ضریب هر دور سه‌تایی $۰ = ۱/۳ - ۱/۶ + ۱/۶$ می‌شود. بنابراین

$$p_۱ + p_{\mathrm{sgn}} + p_۲ = e.$$

این سه عنصر، سه گونهٔ بازنمایی را در جبر گروه از یکدیگر جدا می‌کنند، بدون آنکه پایهٔ ماتریسی دلخواهی انتخاب کنیم.

مثال حل‌شده: چالش ۵ ـ شکافتن سطح انرژی با تقارن

فرض کنید یک سامانهٔ کوانتومی دارای تقارن $S_۳$ است و فضای حالتِ مورد بررسی، بازنمایی جایگشتیِ سه‌بُعدی آن را حمل می‌کند. اگر هامیلتونی H با همهٔ ماتریس‌های جایگشتی جابه‌جا شود، شکل آن چیست؟

گام ۱. جابه‌جایی با همهٔ جایگشت‌ها، تمام درایه‌های قطری H را برابرِ a و همهٔ درایه‌های خارج‌قطر را برابرِ b می‌کند:

$$H = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = (a-b)I_3 + bJ_3.$$

گام ۲. روی بردارِ متقارن $(1,1,1)^T$، ماتریس J_3 مقدار ویژهٔ ۳ دارد؛ پس انرژی $E_1 = a + 2b$ است.
گام ۳. روی صفحهٔ $x+y+z=0$، داریم $J_3 v = 0$؛ بنابراین انرژی دوبار تکرارشوندهٔ $E_2 = a - b$ است.
نتیجه. به‌جای حل معادلهٔ مشخصهٔ درجهٔ سه، تقارن به‌تنهایی ساختار $2 \oplus 1$ و تبهگنی دوتایی را تعیین کرده است.

واژه‌نامهٔ بسیار کوتاه

اصطلاح فارسی	برابر انگلیسی
گروه، زیرگروه، زیرگروهِ نرمال	group, subgroup, normal subgroup
هم‌دسته، کلاس مزدوج	coset, conjugacy class
عمل گروهی، مدار، پایدارساز	group action, orbit, stabilizer
همریختی، یکریختی، خودریختی	homomorphism, isomorphism, automorphism
بازنمایی، وفادار، یکانی	representation, faithful, unitary
تحویل‌ناپذیر، تجزیه‌پذیر	irreducible, decomposable
کاراکتر، میان‌باف، ضرب تانسوری	character, intertwiner, tensor product
جبر گروه، مدول، خودتوان	group algebra, module, idempotent

منابع و یادداشت دربارهٔ متن

منبع اصلیِ ترجمه: فصل اول، Basic Group Theory and Representation Theory از کتاب Continuous Groups for Physicists، بر اساس فایل ۲۶ صفحه‌ای بارگذاری‌شده. ترتیب پانزده بخش، اصطلاحات محوری، قضیه‌ها و پنج مسئلهٔ پایانی از متن اصلی گرفته شده‌اند. توضیح‌های میان‌راهی، کادرهای حل‌مسئله، چالش‌های فیزیکی و تاریخچه‌ها افزودهٔ آموزشی‌اند. در چند مورد، برای دقت علمی،

یادداشتِ ویرایشی نیز آمده است.

منابع کلاسیک معرفی‌شده در پایان فصل اصلی: Boerner (1963); Hamermesh (1962); Jansen & Boon (1967); Weyl (1931); Wigner (1959).

مآخذ بررسی تاریخی و نکات تکمیلی:

- MacTutor، تاریخچهٔ نظریهٔ گروه‌ها و زندگی‌نامه‌های فروبنیوس، شور و ماشکه؛ پیوند به منبع.
- Encyclopedia of Mathematics، مقالهٔ لم برنساید؛ پیوند به مقاله.
- مقالهٔ مروری Angular Momentum Diagrams دربارهٔ ریشه‌های جبریِ روش کلبش ـ گوردان.
- برای توضیح قضیهٔ ماشکه و جبر گروه بر میدانِ عمومی: متون استاندارد نظریهٔ بازنماییِ گروه‌های متناهی؛ این نکته فراتر از اختصار متنِ فصل اصلی است.

پایان فصل ـ آغاز زبانِ تقارن‌ها