

مبانی نظریه گروه و نظریه نمایش

Basic Group Theory and Representation Theory

درسنامه اول نظریه گروه

عباس رستمی

دانشکده فیزیک و مهندسی انرژی صنعتی امیرکبیر

این فصل بر مبنای متن ارائه شده از کتاب Continuous Groups for Physicists تنظیم شده است. ترجمه فارسی با حفظ ترتیب بخش‌ها، تعاریف، معادلات شماره‌دار و مسائل انجام شده و در جاهایی که برای دانشجوی کارشناسی فیزیک به توضیح بیشتری نیاز بوده، توضیحات تکمیلی با عنوان «توضیح تکمیلی» افزوده شده‌اند. مطالب تکمیلی برای روشن‌تر شدن مفهوم‌اند و جزو متن اصلی کتاب محسوب نمی‌شوند.

تهیه شده در قالب XePersian

نسخه مناسب مطالعه و تدریس

فهرست مطالب

۳	۱ مبانی نظریه گروه و نظریه نمایش
۴	۱.۱ تعریف گروه
۵	۲.۱ چند مثال
۷	۳.۱ عملیات درون یک گروه
۷	۱.۳.۱ مزدوج سازی و کلاس های مزدوج
۸	۲.۳.۱ زیرگروه ها
۹	۳.۳.۱ زیرگروه مزدوج
۹	۴.۳.۱ کلاس های جانبی
۹	۵.۳.۱ گروه خارج قسمت
۱۰	۶.۳.۱ مرکز و جابه جایی گر
۱۱	۷.۳.۱ خودریختی ها
۱۱	۴.۱ عملیات و روابط میان گروه ها
۱۱	۱.۴.۱ هم ریختی
۱۲	۲.۴.۱ حاصل ضرب مستقیم
۱۲	۳.۴.۱ حاصل ضرب نیمه مستقیم
۱۲	۵.۱ عمل های گروه و نمایش ها
۱۳	۱.۵.۱ عمل گروه روی یک مجموعه
۱۴	۶.۱ نمایش های گروه
۱۵	۷.۱ نمایش های هم ارز
۱۶	۸.۱ حالت های یکانی و متعامد
۱۶	۹.۱ ماتریس های یک نمایش
۱۷	۱۰.۱ چند عمل روی نمایش ها
۱۷	۱.۱۰.۱ جمع و حاصل ضرب نمایش ها
۱۷	۱۱.۱ کاراکتر یک نمایش
۱۸	۱۲.۱ زیرفضاهای ناورد، تحویل پذیری و عدم تحویل پذیری

۱۳.۱	قضیه شُور: اثبات و کاربردها	۱۹
۱.۱۳.۱	اثبات	۱۹
۲.۱۳.۱	نتیجه مهم: عملگرهای جابه‌جاشونده	۲۰
۳.۱۳.۱	یکتایی تجزیه کامل	۲۰
۱۴.۱	روابط متعامد	۲۱
۱.۱۴.۱	فضای $L^2(G)$ و روابط تعامد	۲۲
۱۵.۱	نمایش‌های منظم گروه	۲۳
۱۶.۱	مزدوج مختلط و حاصل ضرب مستقیم نمایش‌های تحویل‌ناپذیر	۲۴
۱.۱۶.۱	مسئله کلش - گوردان	۲۵
۱۷.۱	جبر گروه	۲۵
۱۸.۱	نمایش گروه و جبر گروه	۲۶

فصل ۱

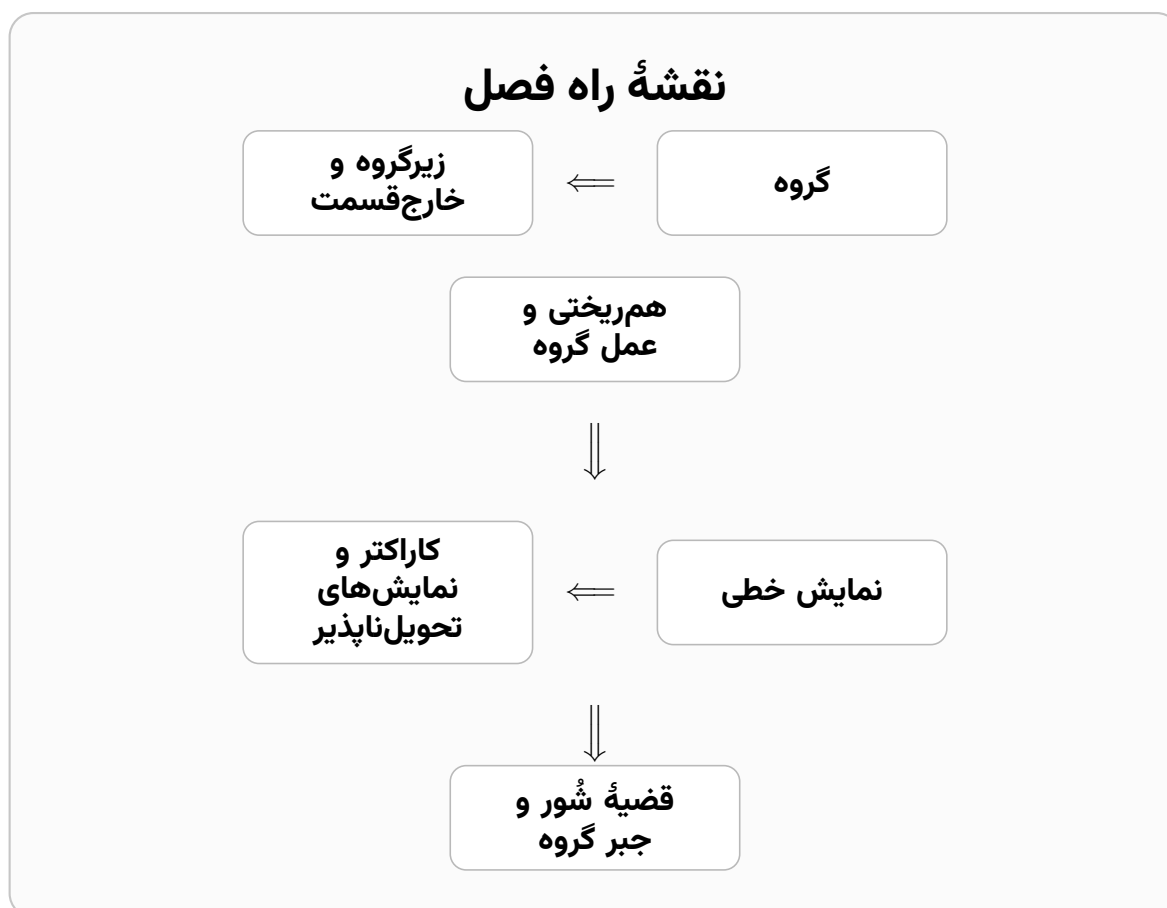
مبانی نظریه گروه و نظریه نمایش

چرا گروه‌ها در فیزیک مهم‌اند؟

در فیزیک، بسیاری از ساختارهای بنیادی در قالب «تقارن» ظاهر می‌شوند. دوران یک دستگاه مختصات، جابه‌جایی در فضا، وارونگی، تبدیل لورنتس و حتی تبدیل‌هایی که حالت‌های کوانتومی را به یکدیگر می‌برند، همگی نمونه‌هایی از عمل‌هایی هستند که می‌توان آن‌ها را با زبان گروه‌ها صورت‌بندی کرد. بنابراین نظریه گروه صرفاً بخشی از جبر مجرد نیست؛ بلکه زبان ریاضی بسیار نیرومندی برای بیان تقارن‌های فیزیکی است. هدف این فصل آن است که ابتدا مفهوم گروه را به صورت دقیق معرفی کنیم، سپس با زیرگروه‌ها، هم‌ریختی‌ها، خارج‌قسمت‌ها و کنش گروه بر مجموعه‌ها آشنا شویم و در ادامه به نمایش‌های خطی گروه‌ها، کاراکترها، نمایش‌های تجزیه‌ناپذیر و قضیه شور برسیم. در انتهای فصل نیز جبر گروه معرفی می‌شود.

پیش‌نیازها

در متن اصلی فرض شده است که خواننده با مبانی مجموعه‌ها، فضاهای برداری، تبدیل‌ها، عملگرهای خطی، نمایش ماتریسی و ضرب داخلی آشناست. در طول فصل هر جا این مفاهیم نقش اساسی داشته باشند، یادآوری کوتاهی ارائه می‌کنیم.



1.1 تعریف گروه

یک گروه G مجموعه‌ای از عناصر مانند

$$a, b, c, \dots, g, \dots, e, \dots$$

همراه با یک قانون ترکیب (یا «ضرب») است که چهار شرط زیر را برآورده می‌کند.

تعریف ۱/۱ – گروه

مجموعه G با یک عمل دوتایی، که برای هر دو عضو $a, b \in G$ حاصل آن با نماد ab نوشته می‌شود، یک گروه است هرگاه:

۱. بسته‌بودن: برای هر $a, b \in G$ ، حاصل ab یک عضو یکتا از G باشد.

۲. شرکت‌پذیری: برای هر $a, b, c \in G$ داشته باشیم

$$a(bc) = (ab)c = abc \in G.$$

۳. عضو همانی: عضو یکتایی $e \in G$ وجود داشته باشد به طوری که

$$ae = ea = a, \quad \forall a \in G.$$

۴. معکوس: برای هر $a \in G$ ، عضو یکتایی $a^{-1} \in G$ وجود داشته باشد به طوری که

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

قانون ترکیب را «عمل دوتایی» می‌نامیم، زیرا برای هر زوج از اعضای گروه تعریف شده است. در متن اصلی اشاره می‌شود که می‌توان دستگاه اصول را فشرده‌تر نیز نوشت؛ مثلاً می‌توان تنها وجود همانی چپ و معکوس چپ را فرض کرد و سپس از آن‌ها وجود ویژگی‌های کامل در بالا را نتیجه گرفت.

اگر تعداد عناصر گروه محدود باشد، تعداد عناصر را با $|G|$ نشان می‌دهیم و آن را **مرتبه گروه** می‌نامیم. گروه ممکن است تعداد عناصر شمارای نامتناهی داشته باشد یا تعداد عناصرش پیوسته باشد؛ در حالت اخیر، معمولاً با یک گروه پیوسته و یک خمینه دارای بعد معین سر و کار داریم.

سه پرسش ساده برای تشخیص یک گروه

برای هر ساختار پیشنهادی، سه پرسش مفهومی بسیار مفیدند: «عمل دقیقاً روی چه مجموعه‌ای تعریف شده است؟»، «عضو همانی چیست؟» و «معکوس هر عنصر چگونه به دست می‌آید؟» پس از آن باید بسته‌بودن و شرکت‌پذیری نیز بررسی شوند. این روش در مثال‌های فیزیکی بسیار کارآمد است.

1.2 چند مثال

۱. گروه متقارن S_n

گروه متقارن، گروه همه جایگشت‌های n شیء است و با S_n نشان داده می‌شود. این گروه متناهی و مرتبه آن برابر با

$$|S_n| = n!$$

است.

هر جایگشت $p \in S_n$ را می‌توان با جدول دوبردی یا با نمایش چرخه‌ای نوشت:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}.$$

همچنین می‌توان آن را به صورت حاصل‌ضرب چرخه‌های مجزا نمایش داد. نکته مهم این است که در قرارداد متداول این کتاب، ترکیب از راست به چپ خوانده می‌شود:

$$(qp)(j) = q(p(j)), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

همانی جایگشت عبارت است از

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)(2) \cdots (n),$$

و معکوس p^{-1} با رابطه

$$p^{-1}(p(j)) = j$$

تعریف می‌شود.

مثال ۱/۱ - چرا ترتیب ترکیب مهم است؟

دو جایگشت p و q را در نظر بگیرید. اگر ابتدا p را روی j اعمال کنیم و سپس q را، نتیجه $q(p(j))$ است. بنابراین qp در این قرارداد به معنای «ابتدا p ، سپس q » است. این نکته در نظریه نمایش و نیز در فیزیک، هنگامی که چند تبدیل متوالی انجام می‌دهیم، حیاتی است.

۲. اعداد صحیح با عمل جمع

مجموعه اعداد صحیح با عمل جمع، یک گروه آبدی است. عضو همانی 0 و معکوس n برابر $-n$ است.

۳. اعداد حقیقی مثبت با عمل ضرب

مجموعه اعداد حقیقی مثبت با عمل ضرب یک گروه آبدی است. عضو همانی 1 و معکوس a برابر $a^{-1} = 1/a$ است.

۴. فضای برداری با عمل جمع

هر فضای برداری حقیقی یا مختلط، با عمل جمع بردارها، یک گروه آبدی تشکیل می‌دهد. همانی، بردار صفر و معکوس هر بردار، منفی آن بردار است.

۵. گروه‌های دوران

گروه‌های $SO(2)$ و $O(2)$ گروه دوران‌های صفحه، و $SO(3)$ و $O(3)$ گروه‌های تبدیل‌های متعامد سه‌بعدی هستند. این گروه‌ها پیوسته و دارای بی‌نهایت عنصرند. در $O(2)$ و $O(3)$ ، دو مؤلفه مجزا وجود دارد که به ترتیب می‌توان آن‌ها را به صورت اجزای پیوسته متعامد و غیرمتعامد تشخیص داد. زیرگروه‌های گسسته‌ای که یک شکل منظم صفحه‌ای یا فضایی را ناوردا می‌گذارند، با گروه‌های نقطه‌ای مرتبط‌اند.

۶. تعمیم به ابعاد بالاتر

گروه‌های دوران و تبدیل‌های متعامد را می‌توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد و به گروه‌های $SO(n)$ ، $O(n)$ ، $SU(n)$ و $U(n)$ رسید. همچنین گروه‌های متعامد مختلط مانند $SO(n, \mathbb{C})$ نیز مطرح می‌شوند.

۷. گروه‌های مرتبط با فضا - زمان

گروه‌های اقلیدسی، گالیله‌ای، لورنتسی و پوانکاره از جمله گروه‌هایی‌اند که به ساختار فضا - زمان مربوط می‌شوند. همه آن‌ها پیوسته و بی‌نهایت‌عنصری‌اند و با افزودن اعمال گسسته‌ای مانند بازتاب فضایی یا زمانی می‌توان چند مؤلفه همبند به دست آورد.

گروه آبدلی و غیرآبدلی

گروه G را آبدلی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in G$ داشته باشیم

$$ab = ba.$$

اگر این رابطه برای همه زوج‌ها برقرار نباشد، گروه غیرآبدلی است.

در میان مثال‌های بالا، S_2 آبدلی است، اما S_n برای $n \geq 3$ غیرآبدلی است. $SO(2)$ آبدلی است، در حالی که $O(2)$ ، $SO(3)$ و $O(3)$ غیرآبدلی‌اند.

قاعده حذف

در هر گروه، برای $a, b, c \in G$ داریم

$$ab = ac \iff b = c, \quad ba = ca \iff b = c. \quad (5.1)$$

این نتیجه از یکتایی معکوس‌ها به دست می‌آید. برای نمونه، اگر $ab = ac$ باشد، از چپ در a^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \implies b = c.$$

جدول ضرب

برای گروه متناهی می‌توان تمام قانون ترکیب را در جدولی نشان داد که سطرها و ستون‌های آن با عناصر گروه برچسب خورده‌اند و در محل تقاطع سطر a و ستون b حاصل ab نوشته می‌شود. به دلیل قاعده حذف، در هر سطر و هر ستون هر عضو گروه دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

1.3 عملیات درون یک گروه**1.3.1 مزدوج‌سازی و کلاس‌های مزدوج**

برای $a, b \in G$ ، مزدوج‌سازی a به وسیله b عنصر دیگری از G می‌سازد:

$$a' = bab^{-1}, \quad a = b^{-1}a'b. \quad (7.1)$$

می‌گوییم a و a' مزدوج یکدیگرند.

کلاس مزدوج

کلاس مزدوج عنصر a مجموعه همه عناصری است که از a با مزدوج‌سازی به دست می‌آیند:

$$C(a) = \{bab^{-1} \mid b \in G\}, \quad (8.1)$$

که در این نمایش تکرارها حذف می‌شوند.

مثلاً $C(e) = \{e\}$ است. همچنین:

۱. $C(a) = C(bab^{-1})$ ؛ بنابراین با دانستن هر عضو یک کلاس، کل کلاس مشخص می‌شود.

۲. دو کلاس مزدوج یا کاملاً یکسان‌اند یا کاملاً جدا از هم‌اند؛ بخشی از یک کلاس نمی‌تواند با بخشی از کلاس دیگر هم‌پوشانی داشته باشد.

۳. کل گروه اجتماع مجزای کلاس‌های مزدوج است.

در S_n اعضای یک کلاس مزدوج دقیقاً ساختار چرخه‌ای یکسان دارند و برعکس. اگر یک جایگشت را به صورت حاصل ضرب چرخه‌های مجزای با طول‌های $m_1, m_2, \dots$ بنویسیم، آنگاه

$$n = m_1 + m_2 + \dots \quad (10.1)$$

و افراز $(m_1, m_2, \dots)$ ساختار چرخه‌ای جایگشت را تعیین می‌کند. بنابراین ساختارهای چرخه‌ای کلاس‌های مزدوج S_n را تعیین می‌کنند.

در $SO(3)$ نیز، همان‌گونه که در فصول بعدی خواهیم دید، هر دوران با یک زاویه معین حول یک محور معین مشخص می‌شود؛ از این رو یک کلاس مزدوج شامل همه دوران‌هایی با همان زاویه و محورهای مختلف است.

برداشت فیزیکی

مزدوج‌سازی را می‌توان به زبان فیزیکی چنین دید: یک تبدیل b دستگاه توصیف را عوض می‌کند، سپس a را در دستگاه جدید اجرا می‌کنیم و در پایان با b^{-1} به دستگاه اول برمی‌گردیم. در نظریه گروه، این تبدیل می‌تواند یک «نسخه هم‌ارز» از همان تقارن تولید کند.

1.3.2 زیرگروه‌ها

زیرگروه

اگر $H \subseteq G$ باشد و عناصر H با همان قانون ترکیب گروه G تمام شرایط یک گروه را برآورده کنند، آنگاه H را یک **زیرگروه** از G می‌نامیم. حالت‌های $H = \{e\}$ و $H = G$ زیرگروه‌های بدیهی‌اند.

یک معیار بسیار فشرده برای تشخیص زیرگروه این است:

$$H \subseteq G \text{ زیرگروه است} \iff h_1^{-1}h_2 \in H \quad \forall h_1, h_2 \in H. \quad (11.1)$$

نمونه‌های آشنا عبارت‌اند از: اعداد صحیح زوج در $(\mathbb{Z}, +)$ ، جایگشت‌های زوج یعنی زیرگروه متناوب A_n در S_n ، زیرگروه S_{n-1} از جایگشت‌هایی که n را ثابت می‌گذارند، و همه دوران‌های $SO(3)$ حول یک محور معین.

هر عنصر a در یک گروه متناهی، از طریق توان‌هایش یک زیرگروه مولد می‌کند:

$$a \in G \implies \{e, a, a^2, \dots, a^{q-1}\},$$

که در آن q کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت است که

$$a^q = e. \quad (12.1)$$

این عدد q را **مرتبه عنصر** a می‌نامیم. آنگاه $a^{-1} = a^{q-1}$ و طبق قضیه لاگرانژ، q مرتبه گروه را تقسیم می‌کند.

1.3.3 زیرگروه مزدوج

برای زیرگروه H و عنصر $g \in G$ تعریف می‌کنیم:

$$H^g = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\} \subseteq G. \quad (۱۳.۱)$$

اگر $g \in H$ باشد، $H^g = H$ ؛ در غیر این صورت ممکن است زیرگروه دیگری به دست آید.

1.3.4 کلاس‌های جانبی

کلاس جانبی چپ و راست

برای زیرگروه $H \subseteq G$ و عنصر $a \in G$ ، کلاس جانبی راست و چپ به ترتیب عبارت‌اند از

$$aH = \{ah \mid h \in H\}, \quad Ha = \{ha \mid h \in H\}. \quad (۱۴.۱)$$

دو کلاس جانبی راست یا دو کلاس جانبی چپ یا کاملاً یکسان‌اند یا کاملاً مجزا. کل گروه اجتماع کلاس‌های جانبی است و همه کلاس‌های جانبی دارای تعداد عناصر یکسانی با H هستند. بنابراین برای گروه متناهی:

$$\frac{|G|}{|H|} \in \mathbb{N}$$

تعداد کلاس‌های جانبی متمایز است. این همان محتوای قضیه لاگرانژ است.

در حالت کلی کلاس‌های جانبی چپ و راست متفاوت‌اند. اگر

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G,$$

آنگاه H را **زیرگروه نرمال** یا **ناوردا** می‌نامیم. در این صورت:

$$H \text{ نرمال است} \iff gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G \iff aH = Ha \quad \forall a \in G. \quad (۱۵.۱)$$

1.3.5 گروه خارج قسمت

اگر H نرمال باشد، کلاس‌های جانبی مشترک چپ و راست خود می‌توانند به عنوان عناصر یک گروه جدید در نظر گرفته شوند که آن را **گروه خارج قسمت** یا **گروه عاملی** می‌نامیم و با G/H نشان می‌دهیم. همانی آن $H = eH$ است و ضرب کلاس‌ها به صورت

$$(aH)(bH) = abH$$

و معکوس به صورت

$$(aH)^{-1} = a^{-1}H$$

تعریف می‌شود. برای گروه متناهی:

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|}.$$

مثال ۲/۱ — خارج قسمت $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

زیرگروه $n\mathbb{Z}$ از گروه آبدی $(\mathbb{Z}, +)$ نرمال است. کلاس‌های جانبی

$$\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$$

همان باقیمانده‌های پیمانه‌ای‌اند و گروه خارج قسمت $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ را می‌سازند. این مثال بعداً برای درک گروه‌های گسسته و نمایش‌های یک‌بعدی بسیار مفید خواهد بود.

1.3.6 مرکز و جابه‌جایی‌گر

دو زیرگروه نرمال طبیعی مهم وجود دارند. نخست، مرکز گروه:

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \quad \forall b \in G\}. \quad (16.1)$$

مرکز یک گروه همیشه آبدی است.

برای اندازه‌گیری میزان غیرآبدی بودن، جابه‌جایی‌گر دو عنصر را تعریف می‌کنیم:

$$q(a, b) = aba^{-1}b^{-1}. \quad (17.1)$$

رابطه بسیار مهم زیر برقرار است:

$$q(a, b) = e \iff ab = ba.$$

همچنین:

$$q(a, b)^{-1} = q(b, a), \quad cq(a, b)c^{-1} = q(cac^{-1}, cbc^{-1}). \quad (18.1)$$

زیرگروه جابه‌جایی‌گر

زیرگروه جابه‌جایی‌گر Q را مجموعه حاصل ضرب‌های متناهی از جابه‌جایی‌گرها می‌گیریم:

$$Q = \{q(a_1, b_1)q(a_2, b_2) \cdots q(a_m, b_m)\}. \quad (19.1)$$

این زیرگروه نرمال است و گروه خارج قسمت G/Q آبدی می‌شود؛ یعنی در خارج قسمت، تمام غیرجابه‌جایی بودن حذف شده است. اگر H زیرگروهی نرمال باشد و G/H آبدی باشد، آنگاه $Q \subseteq H$.

برای S_n ، زیرگروه جابه‌جایی‌گر برابر A_n است و

$$S_n/A_n$$

یک گروه آبدی دو عنصری است.

گروه ساده و نیمه‌ساده

گروه G را **ساده** می‌نامیم اگر زیرگروه نرمال سره نداشته باشد. گروه G را **نیمه‌ساده** می‌نامیم اگر زیرگروه آبدی نرمال نداشته باشد:

$$G \text{ ساده} \implies G \text{ نیمه‌ساده}. \quad (20.1)$$

در همه S_n ‌ها زیرگروه A_n نرمال است، بنابراین هیچ S_n ای ساده نیست. برای $n = 3$ یا $n \geq 5$ ، A_n تنها زیرگروه نرمال ناصفر مناسب S_n است. در S_4 یک زیرگروه نرمال چهارتایی دیگر نیز وجود دارد. در مقابل، $SO(3)$ یک گروه ساده است.

1.3.7 خودریختی‌ها

خودریختی

خودریختی گروه G تابع دوسویی

$$\tau : G \rightarrow G$$

است که ضرب را حفظ کند:

$$\tau(a)\tau(b) = \tau(ab), \quad \tau(G) = G, \quad \tau^{-1} \text{ دارد} \quad (21.1)$$

ازاین‌رو

$$\tau(a^{-1}) = \tau(a)^{-1}, \quad \tau(e) = e.$$

برای هر $g \in G$ ثابت، تابع

$$\tau_g(a) = gag^{-1} \quad (22.1)$$

یک خودریختی است که آن را **خودریختی درونی** می‌نامیم. خودریختی‌های دیگر را **بیرونی** می‌نامیم.

چرا خودریختی مهم است؟

خودریختی، «ساختار گروه» را تغییر نمی‌دهد؛ فقط نام‌گذاری عناصر را به نحوی سازگار عوض می‌کند. در زبان فیزیک، این مفهوم در تشخیص تقارن‌های درونی و ساختارهای هم‌ارزی نقش مهمی دارد.

1.4 عملیات و روابط میان گروه‌ها

1.4.1 همریختی

همریختی گروه‌ها

اگر G' و G دو گروه باشند، تابع

$$\phi : G' \rightarrow G$$

یک **همریختی** است هرگاه

$$\phi(a'b') = \phi(a')\phi(b') \quad \forall a', b' \in G'. \quad (23.1)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\phi(e') = e, \quad \phi(a'^{-1}) = \phi(a')^{-1}, \quad \phi(G') \subseteq G$$

و تصویر $\phi(G')$ زیرگروهی از G است. هسته همریختی برابر است با

$$K = \{g' \in G' \mid \phi(g') = e\}, \quad (24.1)$$

که یک زیرگروه نرمال در G' است.

ایزومورفیسم

اگر هم‌ریختی یک‌به‌یک، پوشا و وارون‌پذیر باشد، آن را **ایزومورفیسم** می‌نامیم. در این صورت دو گروه از دیدگاه ساختار گروهی اساساً یکسان‌اند و می‌نویسیم

$$G' \simeq G.$$

اگر $\phi(G') = G$ باشد، قضیه اول ایزومورفیسم به صورت

$$G'/K \simeq G \quad (۲۵.۱)$$

نوشته می‌شود.

1.4.2 حاصل ضرب مستقیم

برای دو گروه G_1 و G_2 ، حاصل ضرب مستقیم $G_1 \times G_2$ از زوج‌های مرتب (a_1, a_2) تشکیل می‌شود و عمل گروهی آن به صورت مؤلفه‌ای است:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2),$$

$$e = (e_1, e_2), \quad (a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}). \quad (۲۶.۱)$$

برای گروه‌های متناهی:

$$|G_1 \times G_2| = |G_1||G_2|.$$

1.4.3 حاصل ضرب نیمه‌مستقیم

حاصل ضرب نیمه‌مستقیم نوع ظریف‌تری از ترکیب دو گروه است که در آن G_1 و G_2 نقش متقارن ندارند. برای هر $a_1 \in G_1$ یک خودریختی τ_{a_1} از G_2 در نظر می‌گیریم که شرایط سازگاری مناسب را برآورده کند. آن‌گاه قانون ضرب زوج‌های مرتب به صورت

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2\tau_{a_1}(b_2)) \quad (۲۸.۱)$$

تعریف می‌شود. این ساختار در مثال‌های فیزیکی بسیاری، از جمله گروه‌های فضا-زمان، ظاهر خواهد شد.

حاصل ضرب مستقیم در برابر نیمه‌مستقیم

در حاصل ضرب مستقیم، دو مؤلفه مستقل از هم ضرب می‌شوند. در حاصل ضرب نیمه‌مستقیم، یکی از گروه‌ها به وسیله خودریختی‌های گروه دیگر بر دیگری «اثر» می‌گذارد. همین پیچش کوچک منشأ ساختارهای مهمی در گروه‌های فیزیکی است.

1.5 عمل‌های گروه و نمایش‌ها

1.5.1 عمل گروه روی یک مجموعه

فرض کنید G روی مجموعه‌ای X عمل می‌کند. برای هر $g \in G$ نگاشتی

$$\phi_g : X \rightarrow X$$

داریم که درستی قوانین گروه را در قالب نگاشت‌ها بازتاب می‌دهد:

$$\phi_e = \text{Id}_X, \quad \phi_{g'} \circ \phi_g = \phi_{g'g}, \quad \phi_{g^{-1}} = \phi_g^{-1}. \quad (۲۹.۱)$$

همچنین هر ϕ_g یک‌به‌یک، پوشا و وارون‌پذیر است.

مدار و گروه پایداری

مدار یک نقطه $x \in X$ عبارت است از

$$\text{Orb}(x) = \{\phi_g(x) \mid g \in G\}.$$

رابطه

$$x \sim y \iff y = \phi_g(x) \quad \text{برای بعضی } g \in G$$

یک رابطه هم‌ارزی روی X ایجاد می‌کند.

گروه پایداری یا گروه ایزوتروپی نقطه x عبارت است از

$$H(x) = \{g \in G \mid \phi_g(x) = x\}.$$

همچنین برای عنصر ثابت $g \in G$ مجموعه نقاط ثابت آن عبارت است از

$$X_g = \{x \in X \mid \phi_g(x) = x\}.$$

در مکانیک کلاسیک، گروه‌ها معمولاً به صورت تبدیل‌های کانونی بر فضای فاز عمل می‌کنند. در مکانیک کوانتومی، فضای حالت یک فضای خطی، یعنی فضای هیلبرت، است و اصل برهم‌نهی مطرح می‌شود. همین موضوع سبب می‌شود نمایش‌های خطی گروه‌ها اهمیت ویژه‌ای پیدا کنند.

یک مثال ملموس: دوران یک بردار

اگر $G = SO(3)$ و $X = \mathbb{R}^3$ باشد، هر $g \in G$ یک ماتریس دوران است و

$$\phi_g(\mathbf{x}) = g\mathbf{x}.$$

مدار یک بردار غیرصفر، مجموعه تمام بردارهایی با طول ثابت و در جهت‌های مختلف است که با دوران به یکدیگر تبدیل می‌شوند. اگر بردار مشخصی روی محور z باشد، گروه دوران حول همان محور آن بردار را ثابت می‌گذارد و بنابراین در گروه پایداری آن بردار قرار می‌گیرد.

1.6 نمایش‌های گروه

نمایش گروه

فرض کنید G یک گروه و V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. یک نمایش D از G روی V مجموعه‌ای از عملگرهای خطی وارون‌پذیر است به‌گونه‌ای که

۱. برای هر $g \in G$ ، $D(g)$ عملگر خطی وارون‌پذیر روی V باشد؛

۲.

$$D(e) = 1;$$

۳.

$$D(g')D(g) = D(g'g), \quad g', g \in G;$$

۴. بنابراین

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1}.$$

(1.30)

نمایش را وفادار می‌نامیم اگر

$$D(g') = D(g) \implies g' = g, \quad (31.1)$$

وگرنه نمایش نوافادار است. بعد نمایش برابر بعد فضای برداری V است و می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

چرا نمایش مهم است؟

تعریف گروه می‌تواند کاملاً انتزاعی باشد؛ نمایش به ما اجازه می‌دهد عناصر انتزاعی گروه را به ماتریس‌ها یا عملگرهای خطی تبدیل کنیم. این کار محاسبه را ممکن می‌کند و در فیزیک، پیوند مستقیم با حالت‌ها، مشاهده‌پذیرها و تبدیل‌های متقارن فراهم می‌سازد.

مثال تکمیلی – گروه تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع و گروه S_3

یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه رأس دارد. هر تقارن آن یا یک دوران یا یک بازتاب است و تقارن‌های آن دقیقاً ۶ عنصر دارند. بنابراین گروه تقارن مثلث با S_3 هم‌ریخت است. حال روی فضای برداری $V = \mathbb{C}^3$ نمایش جایگشتی را در نظر بگیرید. هر $p \in S_3$ سه مؤلفه یک بردار (x_1, x_2, x_3) را جابه‌جا می‌کند. بردار

$$(1, 1, 1)$$

تحت همه جایگشت‌ها ثابت می‌ماند؛ پس زیرفضای یک‌بعدی

$$V_{\text{sing}} = \text{Span}\{(1, 1, 1)\}$$

ناورداست. از سوی دیگر، زیرفضای

$$V_{\text{p}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

نیز ناورداست. در نتیجه

$$\mathbb{C}^3 = V_{\text{sing}} \oplus V_{\text{p}}$$

و نمایش جایگشتی سه‌بعدی به یک نمایش یک‌بعدی به‌علاوه یک نمایش دوبعدی تحویل‌ناپذیر تجزیه می‌شود:

$$D_{\text{perm}} \simeq D^{(1)} \oplus D^{(2)}.$$

کاراکتر نمایش جایگشتی با توجه به تعداد نقاط ثابت جایگشت به دست می‌آید:

$$\chi(e) = 3, \quad \chi(\text{تبدیل ترانسپوزیشن}) = 1, \quad \chi(\text{چرخه سه‌تایی}) = 0.$$

این مثال یکی از بهترین نمونه‌های اولیه برای فهم این جمله است که «تقارن را می‌توان به یک مسئله جبری درباره فضاهاى ناوردا تبدیل کرد».

پیوند با فیزیک

اگر یک سیستم فیزیکی تحت گروهی از تقارن‌ها متقارن باشد، فضای حالت آن معمولاً به فضاهاى ناوردایی تقسیم می‌شود. حل مسئله تقارن، بنابراین، تا حد زیادی به پیدا کردن نمایش‌های تحویل‌ناپذیر و چندگانگی آن‌ها کاهش می‌یابد. در مکانیک کوانتومی، همین ایده در تحلیل تکانه زاویه‌ای، اسپین و حالت‌های چندزدهای بارها تکرار می‌شود.

اگر مجموعه X ذاتاً ساختار فضای برداری نداشته باشد، می‌توان فضای برداری رسمی $\mathbb{F}[X]$ را از همه ترکیب‌های خطی صوری عناصر X ساخت:

$$\sum_i c_i x_i, \quad c_i \in \mathbb{F},$$

و سپس عمل گروه روی X را به یک نمایش خطی روی $\mathbb{F}[X]$ ارتقا داد. حالت مهم آن زمانی است که خود $X = G$ باشد؛ این همان جایی است که نمایش منظم در ادامه ظاهر خواهد شد.

1.7 نمایش‌های هم‌ارز

فرض کنید D روی V و D' روی V' دو نمایش از G باشند. آن‌ها را **هم‌ارز** می‌نامیم اگر نگاشت خطی وارون‌پذیری $S: V \rightarrow V'$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$D'(g) = SD(g)S^{-1}, \quad \forall g \in G. \quad (32.1)$$

اگر چنین S ی وجود نداشته باشد، نمایش‌ها **ناهم‌ارز** هستند.

تعبیر تغییر پایه

رابطه

$$D'(g) = SD(g)S^{-1}$$

می‌گوید دو نمایش هم‌ارز صرفاً دو توصیف متفاوت از یک ساختار خطی واحدند. این دقیقاً مشابه تغییر مختصات یا تغییر پایه در جبر خطی است: ماتریس‌ها عوض می‌شوند، اما ساختار ذاتی نمایش عوض نمی‌شود.

1.8 حالت‌های یکانی و متعامد

فرض کنید فضای V دارای ضرب داخلی هرمیتی در حالت مختلط یا ضرب داخلی متقارن در حالت حقیقی باشد. نمایش D را **یکانی** یا در حالت حقیقی **متعامد** می‌نامیم هرگاه

$$(D(g)x, D(g)y) = (x, y), \quad \forall g \in G, \quad x, y \in V. \quad (۳۳.۱)$$

نمایش‌های یکانی معمولاً با نماد UR مشخص می‌شوند. برای تمام گروه‌های متناهی و نیز گروه‌های پیوسته فشرده، هر نمایش با یک انتخاب مناسب از ضرب داخلی با یک نمایش یکانی هم‌ارز است. گروه لورنتس $SO(۳, ۱)$ نمونه مهمی است که در آن چنین نتیجه‌ای به‌طور عمومی برقرار نیست.

چرا یکانی بودن در مکانیک کوانتومی طبیعی است؟

اگر $D(g)$ یکانی باشد، ضرب داخلی و در نتیجه هنجار حالت حفظ می‌شود:

$$\|D(g)\psi\|^2 = \|\psi\|^2.$$

از این رو احتمال و نرمال‌سازی حالت‌های کوانتومی تحت تقارن‌های فیزیکی دست‌نخورده باقی می‌ماند.

1.9 ماتریس‌های یک نمایش

برای نمایش‌های متناهی‌بعد، پایه‌ای $\{e_j\}$ در V انتخاب می‌کنیم. برای هر $g \in G$ می‌توان نوشت

$$D(g)e_j = D^k_j(g)e_k, \quad (۳۴.۱)$$

که در آن جمع روی شاخص تکراری k در نظر گرفته می‌شود. بنابراین یک ماتریس $n \times n$ برای هر g به دست می‌آید.

ماتریس‌های نمایش قوانین گروه را به شکل زیر بازتاب می‌دهند:

$$D^j_k(g_1 g_2) = D^j_l(g_1) D^l_k(g_2),$$

$$D^j_k(e) = \delta^j_k,$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1}. \quad (۳۵.۱)$$

اگر پایه با ماتریس وارون‌پذیر S عوض شود، ماتریس نمایش به تبدیل تشابهی زیر دچار می‌شود:

$$D'(g) = S D(g) S^{-1}. \quad (۳۷.۱)$$

اگر پایه متعامد باشد و نمایش یکانی یا حقیقی متعامد باشد، ماتریس‌های نمایش نیز به ترتیب یکانی یا متعامد خواهند بود.

مثال ۳/۱ – نمایش دوران دوبعدی

عنصر زاویه‌ای θ از $SO(2)$ را می‌توان با ماتریس

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

نمایش داد. رابطه

$$D(\theta_1)D(\theta_2) = D(\theta_1 + \theta_2)$$

دقیقاً قانون گروه دوران‌های صفحه را بازتاب می‌دهد. این یک نمونه ساده از یک نمایش حقیقی و یکانی (و در نتیجه متعامد) است.

1.10 چند عمل روی نمایش‌ها

از یک نمایش $D(g)$ می‌توان نمایش‌های جدیدی ساخت:

$$\text{نمایش پادهم‌نشت: } g \mapsto (D(g)^T)^{-1} = D(g^{-1})^T, \quad (1.1)$$

$$\text{نمایش الحاقی: } g \mapsto (D(g)^\dagger)^{-1} = D(g^{-1})^\dagger, \quad (2.1)$$

$$\text{نمایش مزدوج مختلط: } g \mapsto D(g)^*. \quad (38.1)$$

در حالت کلی الحاقی مزدوج مختلط نمایش پادهم‌نشت است. اگر $D(g)$ یک نمایش یکانی باشد، نمایش الحاقی خود نمایش است و نمایش پادهم‌نشت با نمایش مزدوج مختلط یکی می‌شود. اگر $D(g)$ حقیقی و متعامد باشد، نمایش خود پادهم‌نشت است.

1.10.1 جمع و حاصل ضرب نمایش‌ها

اگر D_1 روی V_1 و D_2 روی V_2 دو نمایش باشند، جمع مستقیم

$$D = D_1 \oplus D_2$$

روی $V = V_1 \oplus V_2$ با

$$x = x_1 + x_2, \quad D(g)x = D_1(g)x_1 + D_2(g)x_2 \quad (39.1)$$

تعریف می‌شود. بعد جمع مستقیم برابر مجموع ابعاد است.

حاصل ضرب مستقیم نمایش‌ها روی فضای تنسوری نیز تعریف می‌شود:

$$D(g)(x \otimes y) = D_1(g)x \otimes D_2(g)y, \quad (40.1)$$

و سپس با خطی‌بودن به بردارهای عمومی بسط داده می‌شود. اگر بعدها D_1 و D_2 را نمایش‌های غیرقابل‌تحویل بگیریم، همین ساختار پایه مسئله کلش – گوردان خواهد بود.

1.11 کاراکتر یک نمایش

کاراکتر

کاراکتر نمایش D تابعی روی گروه است که با رد ماتریس نمایش تعریف می‌شود:

$$\chi^{(D)}(g) = \text{Tr } D(g). \quad (۴۱.۱)$$

به دلیل ناوردایی رد تحت تبدیل تشابهی، کاراکتر مستقل از پایه است. همچنین تحت مزدوج‌سازی ثابت می‌ماند:

$$\chi^{(D)}(g'gg'^{-1}) = \chi^{(D)}(g). \quad (۴۲.۱)$$

بنابراین کاراکتر یک **تابع کلاسی** است؛ یعنی روی هر کلاس مزدوج مقدار ثابتی دارد.

برای نمایش یکانی:

$$\chi(g^{-1}) = \chi(g)^*.$$

برای جمع و حاصل ضرب:

$$\chi^{(D_1 \oplus D_2)}(g) = \chi^{(D_1)}(g) + \chi^{(D_2)}(g),$$

$$\chi^{(D_1 \times D_2)}(g) = \chi^{(D_1)}(g) \chi^{(D_2)}(g). \quad (۴۳.۱)$$

چرا کاراکتر یک ابزار نیرومند است؟

کاراکتر اطلاعات یک ماتریس را فشرده می‌کند، اما با وجود این فشردگی، برای نمایش‌های غیرقابل‌تحویل گروه‌های متناهی می‌تواند تقریباً تمام اطلاعات مورد نیاز برای تشخیص نمایش تا هم‌ارزی را در خود نگه دارد. این یکی از دلایل اصلی اهمیت جدول‌های کاراکتری در نظریه گروه فیزیکی است.

1.12 زیرفضاهای ناورد، تحویل‌پذیری و عدم تحویل‌پذیری

زیرفضای ناورد

فرض کنید D نمایش G روی V باشد. زیرفضای $V_1 \subseteq V$ را **ناورد** می‌نامیم اگر

$$x \in V_1, \quad g \in G \implies D(g)x \in V_1. \quad (۴۴.۱)$$

اگر زیرفضای ناوردی غیر بدیهی وجود داشته باشد، نمایش **تحویل‌پذیر** است. اگر هیچ زیرفضای ناوردی غیر بدیهی وجود نداشته باشد، نمایش **تحویل‌ناپذیر** یا **irrep** است. اگر نمایش هم یکانی و هم تحویل‌ناپذیر باشد، آن را **UIR** می‌نامیم.

اگر نمایش تحویل‌پذیر باشد، می‌پرسیم آیا می‌توان V_1 را با زیرفضای ناوردی دیگری مانند V_2 تکمیل کرد به‌طوری‌که

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

اگر چنین باشد نمایش را **قابل تجزیه** و در غیر این صورت **تحویل‌پذیر اما تجزیه‌ناپذیر** می‌نامیم.

در پایه مناسب، حالت تحویل‌پذیر به ساختار بلوکی بالامثلثی می‌انجامد:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & B(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}. \quad (۴۵.۱)$$

اگر بتوان پایه‌ای یافت که $B(g) = 0$ باشد، نمایش قابل تجزیه است. اگر چنین کاری ممکن نباشد، نمایش تحویل‌پذیر ولی تجزیه‌ناپذیر است.

برای نمایش‌های یکانی، تحویل‌پذیری همیشه به تجزیه‌پذیری می‌انجامد؛ زیرا اگر V_1 ناوردا باشد، متمم متعامد آن نیز ناورداست. پس برای گروه‌های متناهی و گروه‌های پیوسته فشرده، هر نمایش یکانی را می‌توان به جمع مستقیم نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد.

تفسیر فیزیکی

اگر فضای حالت یک سیستم کوانتومی به زیرفضاهای ناوردا مستقل تجزیه شود، تحول‌های ناشی از تقارن گروهی نمی‌توانند حالت را از یک زیرفضا به زیرفضای دیگر ببرند. بنابراین نمایش‌های تحویل‌ناپذیر را می‌توان «بلوک‌های بنیادی» ساختار تقارن دانست.

یادداشت تاریخی – ایسای شور

ایسای شور در شکل‌گیری نظریه نمایش گروه‌های متناهی نقش بنیادی داشت. نام او با قضیه‌ای گره خورده است که نشان می‌دهد در نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، یک عملگر بینابینی یا باید کاملاً صفر باشد یا آن‌قدر اطلاعات ساختاری در خود داشته باشد که دو نمایش را به یکدیگر مرتبط کند. در فیزیک، این نتیجه به‌ویژه برای تحلیل کمیت‌هایی که با تمام تبدیل‌های یک گروه تقارن جابه‌جا می‌شوند اهمیت دارد.

1.13 قضیه شور: اثبات و کاربردها

قضیه شور

فرض کنید D روی V و D' روی V' دو نمایش تحویل‌ناپذیر مختلط از G باشند و عملگر خطی رابطه بینابینی $T: V \rightarrow V'$

$$TD(g) = D'(g)T, \quad \forall g \in G \quad (46.1)$$

را برقرار کند. آنگاه یکی از دو حالت رخ می‌دهد:

۱. D و D' ناهم‌ارزند و $T = 0$ ؛

۲. یا T وارون‌پذیر است و در نتیجه D و D' هم‌ارزند.

(1.47)

1.13.1 اثبات

فضای هسته و تصویر T را تعریف کنید:

$$N(T) = \{x \in V \mid Tx = 0\}, \quad R(T) = T(V) \subseteq V'. \quad (48.1)$$

از رابطه بینابینی نتیجه می‌شود که $N(T)$ نسبت به D ناوردا و $R(T)$ نسبت به D' ناورداست. چون D و D' تحویل‌ناپذیرند، اگر $T \neq 0$ ، نمی‌توان $N(T)$ را فضای مناسبی غیر از صفر و کل V دانست؛ بنابراین

$$N(T) = \{0\},$$

پس T یک‌به‌یک است. به همین ترتیب

$$R(T) = V',$$

پس T پوشاست. بنابراین T وارون‌پذیر است و دو نمایش هم‌ارزند.

1.13.2 نتیجه مهم: عملگرهای جابه‌جاشونده

اگر $V' = V$ و $D' = D$ باشد، شرط شُور به صورت

$$TD(g) = D(g)T, \quad \forall g \in G \quad (50.1)$$

درمی‌آید. اگر D تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه هر عملگری که با همه $D(g)$ ها جابه‌جا شود، باید مضربی از عملگر همانی باشد:

$$TD(g) = D(g)T \quad \forall g \implies T = \lambda I. \quad (51.1)$$

عکس این نتیجه نیز برقرار است: اگر تنها عملگرهایی که با تمام $D(g)$ ها جابه‌جا می‌شوند مضرب‌های همانی باشند، آنگاه نمایش تحویل‌ناپذیر است.

مثال ۴/۱ — اهمیت قضیه شُور

فرض کنید یک سامانه کوانتومی تحت یک گروه تقارن دارای نمایش تحویل‌ناپذیر باشد و یک مشاهده‌پذیر A با همه عملگرهای تقارن جابه‌جا شود. طبق قضیه شُور، در فضای یک نمایش تحویل‌ناپذیر، A نمی‌تواند ساختار پیچیده‌ای داشته باشد؛ بلکه باید

$$A = \lambda I$$

باشد. این نتیجه نسخه ریاضی دقیقی از این شهود است که در یک «بخش بنیادی تقارن»، کمیت کاملاً ناوردای گروهی نمی‌تواند حالت‌ها را به شکل غیرtrivial از یکدیگر متمایز کند.

1.13.3 یکتایی تجزیه کامل

فرض کنید یک نمایش متناهی‌بعدی در دو راه مختلف به نمایش‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه شده باشد:

$$V = \bigoplus_{\rho} L_{\rho}, \quad V = \bigoplus_{\sigma} M_{\sigma}. \quad (52.1)$$

هر بردار $x_{\rho} \in L_{\rho}$ را به صورت یکتا برحسب مؤلفه‌های آن در فضاهای M_{σ} می‌نویسیم:

$$x_{\rho} = \sum_{\sigma} y_{\sigma}, \quad y_{\sigma} \in M_{\sigma}. \quad (53.1)$$

برای هر زوج (σ, ρ) نگاشت $T_{\sigma\rho} : L_{\rho} \rightarrow M_{\sigma}$ را با

$$T_{\sigma\rho} x_{\rho} = y_{\sigma} \quad (54.1)$$

تعریف می‌کنیم. ناوردایی دو تجزیه نشان می‌دهد که

$$T_{\sigma\rho}D^{(\rho)}(g) = D^{(\sigma)}(g)T_{\sigma\rho}. \quad (۵۶.۱)$$

پس با قضیهٔ شور:

$$T_{\sigma\rho} = 0 \quad \text{ناهم‌ارز باشند } D^{(\sigma)} \text{ و } D^{(\rho)} \text{ اگر}$$

و اگر $T_{\sigma\rho} \neq 0$ باشد، دو نمایش باید هم‌ارز باشند.

در نتیجه نوع نمایش‌های تحویل‌ناپذیر حاضر در تجزیه و نیز تعداد تکرار هر نوع، مستقل از چگونگی انجام تجزیه است. تنها انتخاب زیرفضاهای مجزا برای نسخه‌های هم‌ارز یک نمایش می‌تواند دلخواه باشد.

یک نکته مفهومی مهم

قضیهٔ یکتایی تجزیه نمی‌گوید که «پایه» یا «هر زیرفضای منفرد» یکتا است. چیزی که یکتا است، مجموعهٔ انواع نمایش‌های تحویل‌ناپذیر و چندگانگی ظهور هر نوع، تا هم‌ارزی است.

1.14 روابط متعامد

این بخش یکی از ابزارهای اساسی نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی را ارائه می‌کند. فرض کنید $f(g)$ یک تابع مختلط روی گروه متناهی G باشد. میانگین آن را تعریف می‌کنیم:

$$M(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g). \quad (۶۱.۱)$$

این عمل دارای ویژگی‌های خطی، نامنفی بودن، نرمال‌سازی و ناوردایی نسبت به انتقال و وارون‌سازی است:

$$M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2), \quad M(\lambda f) = \lambda M(f),$$

$$f \geq 0 \implies M(f) \geq 0, \quad M(1) = 1,$$

و برای g ثابت:

$$M_g f(g) = M_g f(g \cdot g) = M_g f(gg \cdot) = M_g f(g^{-1}). \quad (۶۲.۱)$$

اکنون دو نمایش تحویل‌ناپذیر D روی V و D' روی V' را در نظر بگیرید و یک نگاشت خطی دلخواه $S: V \rightarrow V'$ تعریف کنید. میانگین

$$T_S = M_g (D'(g^{-1})SD(g)) \quad (۶۳.۱)$$

یک نگاشت خطی $V \rightarrow V'$ است و با استفاده از ناوردایی میانگین داریم

$$D'(g)T_S = T_S D(g). \quad (۶۴.۱)$$

پس طبق شور:

$$D' \not\simeq D \implies T_S = 0,$$

و اگر $D' \simeq D$ ، آنگاه

$$T_S = \lambda(S)1. \quad (۶۵.۱)$$

برای نمایش‌های ناهم‌ارز، در هر پایه:

$$M_g \left(D_{j'k'}^{(\alpha)}(g^{-1}) D_{jk}^{(\beta)}(g) \right) = 0. \quad (66.1)$$

در حالت یکانی:

$$M_g \left(D_{j'k'}^{(\alpha)}(g) * D_{jk}^{(\beta)}(g) \right) = 0. \quad (67.1)$$

برای نمایش‌های هم‌ارز و در حالت یک نمایش واحد، نتیجه معروف روابط تعامد ماتریسی به دست می‌آید:

$$M_g \left(D_{jk}(g) * D_{lm}(g) \right) = \frac{\delta_{jl} \delta_{km}}{\dim V}. \quad (70.1)$$

1.14.1 فضای $L^2(G)$ و روابط تعامد

فضای همه توابع مختلط روی G را می‌توان به صورت فضای هیلبرت متناهی‌بعدی $L^2(G)$ در نظر گرفت و ضرب داخلی را چنین تعریف کرد:

$$(f_1, f_2) = M_g \left(f_1(g) * f_2(g) \right). \quad (71.1)$$

اگر نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر را با اندیس‌های $\alpha, \beta, \dots$ و ابعادشان را با N_α نشان دهیم، آنگاه

$$\left(D_{jk}^{(\alpha)}(\cdot), D_{lm}^{(\beta)}(\cdot) \right) = \frac{\delta_{\alpha\beta} \delta_{jl} \delta_{km}}{N_\alpha}. \quad (72.1)$$

بنابراین تعداد مؤلفه‌های ماتریسی مستقل متعامد نمی‌تواند از بعد فضای $L^2(G)$ بیشتر شود و نتیجه می‌شود:

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha}^2 \leq |G|. \quad (73.1)$$

برای کاراکترها، با جمع روی شاخص‌های قطری:

$$(\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (74.1)$$

از آنجا که کاراکترها توابع کلاسی‌اند، نتیجه می‌گیریم:

تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ناهم‌ارز $\leq$ تعداد کلاس‌های مزدوج گروه.

(1.75)

اگر نمایش یکانی عمومی D شامل نمایش $D^{(\alpha)}$ با چندگانگی ν_α باشد، آنگاه

$$\chi(g) = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \chi^{(\alpha)}(g),$$

9

$$\nu_{\alpha} = (\chi^{(\alpha)}, \chi), \quad (\chi, \chi) = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha}^2 \geq 1. \quad (76.1)$$

پس برای نمایش یکانی:

$$(\chi, \chi) = 1$$

در یک نمایش یکانی، دقیقاً هنگامی برقرار است که نمایش تحویل‌ناپذیر باشد.

چگونه کاراکتر، چندگانگی را آشکار می‌کند؟

اگر کاراکتر نمایش کلی را داشته باشیم، ضرب داخلی آن با کاراکتر هر نمایش تحویل‌ناپذیر دقیقاً تعداد دفعات ظهور آن نمایش در تجزیه کامل را می‌دهد. این یکی از زیباترین کاربردهای ساختار هیلبرت در نظریه گروه است.

1.15 نمایش‌های منظم گروه

برای گروه متناهی G ، فضای $L^2(G)$ بعد $|G|$ دارد. دو نمایش طبیعی روی آن تعریف می‌شوند که نمایش منظم چپ و راست نام دارند. روی تابع f داریم:

$$(L_{g'}f)(g) = f(g'^{-1}g), \quad (R_{g'}f)(g) = f(gg'). \quad (77.1)$$

این دو نمایش یکانی‌اند و با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند:

$$L_{g_1}L_{g_2} = L_{g_1g_2}, \quad R_{g_1}R_{g_2} = R_{g_1g_2}, \quad L_{g_1}R_{g_2} = R_{g_2}L_{g_1}. \quad (78.1)$$

اگر پایه دلتا را با نماد دیراک بنویسیم،

$$f(g) = \langle g | f \rangle, \quad \langle g' | g \rangle = \delta_{g'g}, \quad (79.1)$$

آنگاه

$$L_{g'}|g\rangle = |g'g\rangle, \quad R_{g'}|g\rangle = |gg'^{-1}\rangle. \quad (80.1)$$

کاراکتر هر دو نمایش منظم برابر است با

$$\chi^{(\text{left})}(g) = \text{Tr } L_g = \chi^{(\text{right})}(g) = \text{Tr } R_g = |G|\delta_{g,e}. \quad (81.1)$$

اگر $D^{(\alpha)}$ یک نمایش تحویل‌ناپذیر با بعد N_α باشد، از فرمول چندگانگی نتیجه می‌شود که این نمایش در هر یک از نمایش‌های منظم دقیقاً N_α بار ظاهر می‌شود:

$$\nu_\alpha = N_\alpha. \quad (82.1)$$

بنابراین رابطه معروف:

$$\boxed{\sum_{\alpha} N_{\alpha}^2 = |G|} \quad (83.1)$$

به دست می‌آید.

از روابط تعامد، مجموعه نرمال‌شده عناصر ماتریسی

$$\left\{ N_{\alpha}^{1/2} D_{jk}^{(\alpha)}(g) \right\}$$

یک پایه متعامد برای $L^2(G)$ است. در نتیجه هر تابع $f(g)$ را می‌توان به صورت یکتا بسط داد:

$$f(g) = \sum_{\alpha, j, k} N_{\alpha}^{1/2} D_{jk}^{(\alpha)}(g) f_{jk}^{(\alpha)}, \quad (84.1)$$

که در آن

$$f_{jk}^{(\alpha)} = N_{\alpha}^{1/2} \left(D_{jk}^{(\alpha)}, f \right).$$

همچنین هم‌ارز رابطه پارسوال:

$$\frac{1}{|G|} \sum_g |f(g)|^2 = \sum_{\alpha, j, k} |f_{jk}^{(\alpha)}|^2.$$

اگر f یک تابع کلاسی باشد، یعنی

$$f(g'gg'^{-1}) = f(g) \quad \forall g, g',$$

آنگاه بسط آن فقط برحسب کاراکترهای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر است:

$$f(g) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \chi^{(\alpha)}(g), \quad f_{\alpha} = (\chi^{(\alpha)}, f). \quad (۸۵.۱)$$

در نتیجه کران (۷۵.۱) به برابری ارتقا می‌یابد:

$$\boxed{\text{تعداد کلاس‌های مزدوج} = \text{تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ناهم‌ارز}}. \quad (۸۶.۱)$$

نتیجه بنیادی برای گروه‌های متناهی

برای یک گروه متناهی سه عدد بنیادی به یکدیگر پیوند می‌خورند: مرتبه گروه، ابعاد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر و تعداد کلاس‌های مزدوج. روابط

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha}^2 = |G|$$

9

$$\#\{\text{irreps}\} = \#\{\text{classes conjugacy}\}$$

از ابزارهای اصلی برای یافتن ساختار نمایش‌های گروه هستند.

1.16 مزدوج مختلط و حاصل ضرب مستقیم نمایش‌های تحویل‌ناپذیر

اگر $D^{(\alpha)}$ یک نمایش تحویل‌ناپذیر یکانی باشد، نمایش مزدوج مختلط $D^{(\alpha)*}$ نیز تحویل‌ناپذیر و یکانی است. برای کاراکتر داریم:

$$\chi^{(\alpha)}(g)^* = \chi^{(\alpha)*}(g).$$

اگر کاراکتر حقیقی باشد، دو نمایش مزدوج با یکدیگر هم‌ارزند؛ اگر کاراکتر همیشه حقیقی نباشد، ممکن است دو نمایش ناهم‌ارز باشند.

اگر در حالت هم‌ارز بودن ماتریس‌ها بتوان C یکانی یافت که

$$D^{(\alpha)}(g)^* = CD^{(\alpha)}(g)C^{-1}, \quad C^{\dagger}C = \mathbf{1}, \quad C^T = \lambda C, \quad \lambda = \pm 1, \quad (۸۸.۱)$$

سه حالت کیفی پدیدار می‌شود: **حقیقی**، **شبه‌حقیقی** و **مختلط**. در حالت $\lambda = +1$ می‌توان پایه‌ای یافت که همه ماتریس‌ها حقیقی شوند. در حالت $\lambda = -1$ نمایش با مزدوج مختلط خود هم‌ارز است، اما نمی‌توان همه ماتریس‌ها را هم‌زمان در یک پایه حقیقی کرد.

1.16.1 مسئله کلش - گوردان

برای دو نمایش تحویل‌ناپذیر $D^{(\alpha)}$ و $D^{(\beta)}$ ، حاصل ضرب مستقیم یک نمایش یکانی با بعد

$$N_{\alpha}N_{\beta}$$

است و کاراکتر آن

$$\chi(g) = \chi^{(\alpha)}(g)\chi^{(\beta)}(g) \quad (89.1)$$

است. تجزیه کامل آن به صورت

$$D^{(\alpha)} \times D^{(\beta)} = \bigoplus_{\gamma} \nu_{\alpha\beta,\gamma} D^{(\gamma)}, \quad \nu_{\alpha\beta,\gamma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (90.1)$$

خواهد بود و چندگانگی‌ها از رابطه

$$\nu_{\alpha\beta,\gamma} = (\chi^{(\gamma)}, \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}) \quad (91.1)$$

به دست می‌آیند.

سری سمت راست را **سری کلش - گوردان** می‌نامیم. تغییر پایه‌ای که حاصل ضرب مستقیم را به این ساختار بلوکی می‌برد، با ضرایب کلش - گوردان انجام می‌شود و این ضرایب به انتخاب پایه وابسته‌اند.

برای یک گروه آبله، هر نمایش یکانی تحویل‌ناپذیر یک‌بعدی است و هر عنصر گروه یک کلاس مزدوج به تنهایی است؛ در این حالت نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر را معمولاً «کاراکتر» می‌نامیم. در گروه غیرآبله دست‌کم برخی از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر چندبعدی‌اند.

چشم‌انداز کوانتومی

در مکانیک کوانتومی، حاصل ضرب تانسوری برای ترکیب درجات آزادی یا ترکیب دو سیستم به کار می‌رود. بنابراین مسئله تجزیه حاصل ضرب دو نمایش تنها یک مسئله جبر مجرد نیست؛ بلکه مستقیماً با ترکیب تکانه‌های زاویه‌ای، اسپین و ساختار چندزده‌ای مرتبط است.

1.17 جبر گروه

فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. مجموعه تمام ترکیب‌های خطی صوری عناصر گروه را به صورت

$$\mathbb{F}[G] = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{F}, x_i \in G \right\} \quad (92.1)$$

در نظر بگیرید.

این مجموعه را از چند دیدگاه می‌توان نگریست:

۱. به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ ؛ جمع و ضرب اسکالر طبیعی‌اند. این همان فضای زیربنایی نمایش منظم است.

۲. به عنوان یک حلقه یکه‌دار؛ عناصر را با استفاده از قانون گروه در هم ضرب می‌کنیم و عنصر e_G نقش واحد ضربی را دارد. اگر G آبله باشد، $\mathbb{F}[G]$ نیز حلقه‌ای جابجایی‌پذیر است؛ اگر G غیرآبله باشد، معمولاً جابجایی‌پذیر نیست.

۳. به عنوان یک جبر روی $\mathbb{F}$ ؛ علاوه بر ساختار حلقه، ضرب اسکالر توسط عناصر $\mathbb{F}$ نیز تعریف شده است.

1.18 نمایش گروه و جبر گروه

اگر $D(g)$ یک نمایش خطی از G روی فضای V باشد و

$$a = \sum_i a_i x_i \in \mathbb{F}[G],$$

می‌توان عمل a بر $v \in V$ را با خطی بودن تعریف کرد:

$$a \cdot v = \left(\sum_i a_i x_i \right) \cdot v \mapsto \sum_i a_i D(x_i)v = \sum_i a_i v_i \in V, \quad (93.1)$$

که در آن $v_i = D(x_i)v$ است.

این ساختار جدید، یک **مدول** روی حلقه $\mathbb{F}[G]$ است. مدول را می‌توان تعمیم فضای برداری در نظر گرفت که در آن به جای میدان اسکالر، یک حلقه قرار داده شده است.

در زبان مدول‌ها، مفاهیم نظریه نمایش دوباره بیان می‌شوند: زیرفضای ناورد به زیرمدول متناظر است، نمایش تحویل‌ناپذیر به یک زیرمدول ساده یا تحویل‌ناپذیر متناظر است و مانند آن.

یک مزیت مهم این دیدگاه آن است که ساخت زیرمدول‌ها به جست‌وجوی عناصر ایدمپوتان در جبر گروه مربوط می‌شود؛ یعنی عناصری مانند a که

$$a^2 = a$$

یا در صورت تعمیم مقیاس‌پذیر، $a^2 = ca$ برای $c \in \mathbb{F}$ باشند. برای یافتن زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیرتر، ایدمپوتان‌های **اولیه** اهمیت دارند؛ یعنی آن‌هایی که نمی‌توانند به صورت جمع دو ایدمپوتان متعامد شکسته شوند. دو ایدمپوتان a و b را متعامد می‌نامیم اگر

$$ab = ba = 0.$$

این ابزارها در فصل‌های بعد، به‌ویژه در مطالعه نمایش‌های تحویل‌ناپذیر S_n ، به کار خواهند آمد. در ادامه کتاب میدان مورد نظر عمدتاً $\mathbb{C}$ خواهد بود.

چرا جبر گروه را در یک درس کارشناسی معرفی می‌کنیم؟

ممکن است جبر گروه در نگاه اول موضوعی پیشرفته به نظر برسد، اما از نظر مفهومی یک پیام مهم دارد: گروه اطلاعات تقارن را فراهم می‌کند، در حالی که جبر گروه اجازه می‌دهد از آن تقارن‌ها ترکیب‌های خطی بسازیم و آن‌ها را مانند یک ساختار جبری واحد مطالعه کنیم. این زبان در نظریه نمایش، مکانیک کوانتومی و فیزیک ریاضی بسیار طبیعی است.

خلاصه مفهومی فصل

از گروه تا نمایش

مسیر اصلی فصل را می‌توان در زنجیره زیر خلاصه کرد:

گروه $\rightarrow$ زیرگروه و کلاس مزدوج $\rightarrow$ هم‌ریختی و گروه خارج‌قسمت $\rightarrow$ عمل گروه

نمایش خطی $\rightarrow$ کاراکتر $\rightarrow$ نمایش تحویل‌ناپذیر $\rightarrow$ قضیه شور

برای گروه متناهی، روابط تعامد و نمایش‌های منظم در نهایت نشان می‌دهند که تعداد کلاس‌های مزدوج با تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ناهم‌ارز برابر است و

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha}^{\vee} = |G|.$$

این دو نتیجه ستون فقرات نظریه نمایش گروه‌های متناهی‌اند.

مسائل

مسئله ۱/۱

فرض کنید قانون ترکیب گروه شرکت‌پذیر باشد و فقط وجود عضو همانی چپ و معکوس چپ را بدانیم:

۱. عضو یکتای e چنان باشد که $ea = a$ برای همه a ؛

۲. برای هر a ، عضو یکتای a^{-1} چنان باشد که $a^{-1}a = e$.

نشان دهید که خواص همانی دوطرفه و معکوس دوطرفه، یعنی بخش‌های (iii) و (iv) تعریف گروه، نتیجه می‌شوند.

مسئله ۲/۱

برای یک گروه متناهی با مرتبه اول، نشان دهید که هیچ زیرگروه نابديهی وجود ندارد.

مسئله ۳/۱

اگر H زیرگروهی نرمال از G باشد و G/H آبلی باشد، نشان دهید که زیرگروه جابه‌جایی‌گر Q زیرگروهی از H است.

مسئله ۴/۱

گروه انتقال‌ها در یک بعد حقیقی، $x \mapsto x + a$ ، آبلی است. نشان دهید نگاشت

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یک نمایش است و مشخص کنید که این نمایش تحویل‌پذیر یا تحویل‌ناپذیر و نیز تجزیه‌پذیر یا تجزیه‌ناپذیر است.

مسئله ۵/۱ – لم برن ساید

برای یک گروه متناهی G که روی مجموعه متناهی X عمل می‌کند، نشان دهید:
 ۱. اگر $x, y \in X$ روی یک مدار باشند، گروه‌های پایداری آن‌ها مزدوج‌اند:

$$H(y) = gH(x)g^{-1}$$

برای یک $g \in G$ مناسب.

۲. برای هر $x \in X$ یک تناظر دوسویی طبیعی بین مدار $\text{Orb}(x)$ و فضای کلاس‌های جانبی $G/H(x)$ وجود دارد؛ در نتیجه

$$|\text{Orb}(x)| = |G/H(x)|.$$

۳. اگر X به مدارهای مجزا تقسیم شود، تعداد مدارها برابر است با

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

که همان لم برن ساید است.

راهنمای مطالعه برای دانشجوی فیزیک

آنچه باید واقعاً بلد باشید

پس از مطالعه این فصل، دانشجو باید بتواند بدون حفظ طوطی‌وار تعاریف‌ها توضیح دهد:

۱. یک گروه دقیقاً چیست و چرا مثال‌هایی مانند $(\mathbb{Z}, +)$ و $SO(3)$ گروه‌اند؛

۲. زیرگروه، کلاس مزدوج، زیرگروه نرمال و گروه خارج‌قسمت چه تفاوتی دارند؛

۳. هم‌ریختی چه اطلاعاتی را حفظ می‌کند و چرا هسته آن یک زیرگروه نرمال است؛

۴. عمل گروه چگونه به نمایش خطی تبدیل می‌شود؛

۵. نمایش‌های هم‌ارز چرا فقط توصیف‌های مختلف یک ساختارند؛

۶. تفاوت نمایش تحویل‌پذیر، تحویل‌ناپذیر، تجزیه‌پذیر و تجزیه‌ناپذیر چیست؛

۷. کاراکتر چیست و چرا فقط به کلاس مزدوج وابسته است؛

۸. قضیه شور چه می‌گوید و چرا در فیزیک کوانتومی مهم است؛

۹. چگونه از روابط تعامد برای یافتن چندگانگی نمایش‌ها استفاده می‌شود؛

۱۰. و در نهایت چرا برای گروه متناهی

$$\sum_{\alpha} N_{\alpha}^2 = |G|$$

است.

منابع پیشنهادی

- H. Boerner, *Representations of Groups with Special Consideration for the Needs of Modern Physics*.
- M. Hamermesh, *Group Theory and Its Application to Physical Problems*.
- L. Jansen and M. Boon, *Theory of Finite Groups: Applications in Physics*.
- H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*.
- E. P. Wigner, *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*.