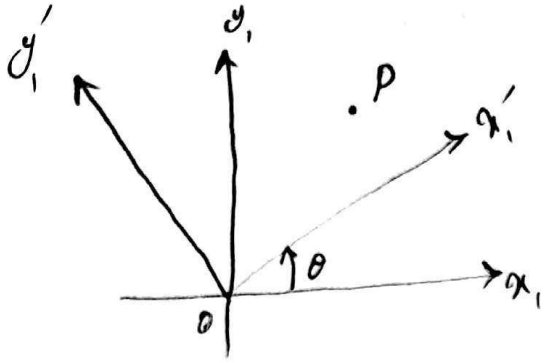
بسم الله

2.1 مفهوم کمیت اسکالر

کمیت‌هایی که تحت تبدیل مختصات بدان تغییر نمی‌کنند - کمیت اسکالر

3.1 تبدیل مختصات



$$\lambda_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_2' = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{cases}$$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$\rightarrow x_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ji} x_j' \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

ماتریس تبدیل - ماتریس دوران

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} = x_1'\hat{i}' + x_2'\hat{j}' + x_3'\hat{k}'$$

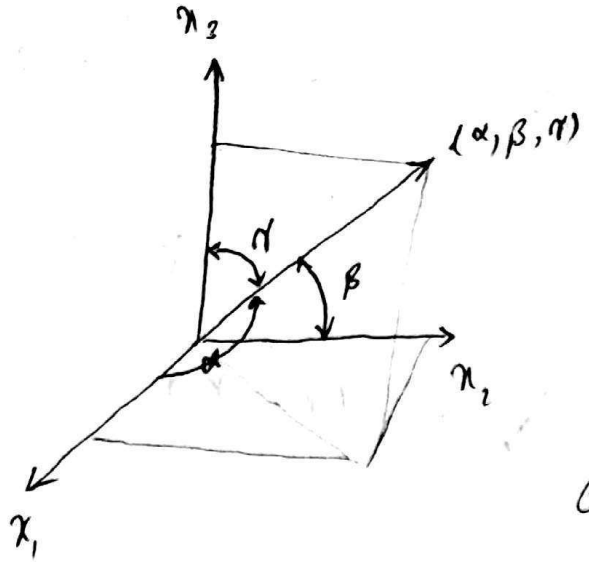
$$\rightarrow |\vec{r}| = |\vec{r}'| = r$$

عملگر دوران طول بردارها را حفظ می‌کند.

Scanned with CamScanner

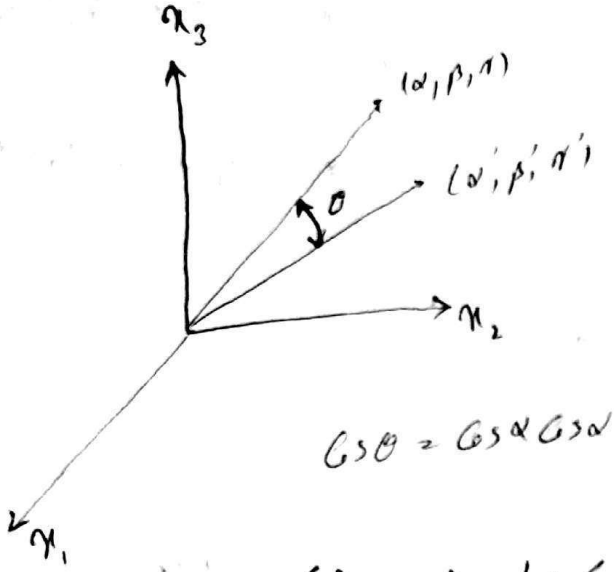
4.1 خواص ماتریس دوران:

کسینوس‌های زاویه:



$$\cos\alpha \;,\; \cos\beta \;,\; \cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

اگر λ_{ij} کسینوس زاویه بین x_i و x_j باشد، آنگاه سطرهای ماتریس دوران

و ستون‌های آن نیز متعامد یکه هستند.

$$\sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

↓ دلتای کرونکر

چرخش (x_1, x_2, x_3):

شرط تقارن در دستگاه گرفته شده.

چرخش (x_1', x_2', x_3'):

$$\sum_i \lambda_{ij}\lambda_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

5-1 عملیات ماتریسی:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \dots \rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_i \quad \longrightarrow \quad x' = \lambda x$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های A, B, C

$$C = AB \rightsquigarrow C_{ij} = [AB]_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

سطر ← i ، j → ستون

$$[C]_{mn} = [A]_{mk} [B]_{kn}$$

$AB \neq BA$ رابطه کلی برقرار نیست.

$$\sum_k B_{ik} A_{kj} \neq \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

ماتریس وارون آن A : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$IA = AI = A$$

Scanned with CamScanner

خاصیت شرکت‌پذیری $[AB]C = A[BC]$

$C = A + B \rightsquigarrow C_{ij} = B_{ij} + A_{ij}$

ماتریس B و A دارای ابعاد یکسان باشند.

- ترانهاده: ماتریسی که با تعویض سطر و ستون‌ها از ماتریس اصلی به دست می‌آید.

$A \xrightarrow{\text{ترانهاده}} A^t \rightsquigarrow \lambda^t_{ij} = \lambda_{ji}$

$(\lambda^t)^t = \lambda$

$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x'_j \rightsquigarrow x_i = \sum_j \lambda^t_{ij} x'_j$

$\rightarrow X = \lambda^t X'$

$\lambda \lambda^t = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11}\lambda_{11} + \lambda_{12}\lambda_{12} = 1 & \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} = 0 \\ \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} = 0 & \lambda_{21}\lambda_{21} + \lambda_{22}\lambda_{22} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 = \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 = 1 \quad , \quad \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} = \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} = 0$

Scanned with CamScanner

$\rightarrow \quad \lambda^t \lambda = 1$

$\lambda \lambda^{-1} = 1$
$\lambda \lambda^t = 1$ $\longrightarrow$ $\lambda^t = \lambda^{-1}$ جای گذاری کنید.

$X' = \lambda_1 X \quad , \quad X'' = \lambda_2 X'$

$\rightarrow X'' = \lambda_2 \lambda_1 X \rightarrow X'' = \lambda_3 X$

$\lambda_2 \lambda_1 \neq \lambda_1 \lambda_2$

- $AB \rightsquigarrow (AB)^t = B^t A^t$

$\lambda \rightsquigarrow$ بُردار $\Rightarrow \lambda^{-1} = \lambda^t \rightarrow \lambda \lambda^t = 1$

$\mu \rightsquigarrow$ بُردار $\Rightarrow \mu^{-1} = \mu^t \quad \mu \mu^t = 1$

$\rightarrow \mu\lambda \Rightarrow (\mu\lambda)^t (\mu\lambda) = \lambda^t \underbrace{\mu^t \mu}_{=1} \lambda = \lambda^t \lambda = 1 = (\mu\lambda)^{-1} (\mu\lambda)$

$\rightarrow (\mu\lambda)^t = (\mu\lambda)^{-1}$

Scanned with CamScanner

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i A_i B_i$ scalar

$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \equiv A$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

$\vec{B}, \vec{A}$

$\vec{A}'\cdot\vec{B}' = \vec{A}\cdot\vec{B}$

- $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$
- $|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})} = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2}$
- $\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i A_i B_i = \sum_i B_i A_i = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$
- $\vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3 = \sum_i \hat{e}_i A_i = (A_1, A_2, A_3) = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$

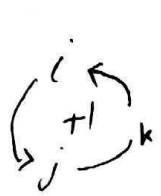
$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\vec{A},\vec{B})$, $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij}$

Scanned with CamScanner

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ Vector. ضرب برداری دو بردار، فصل 12-1

$C_i \equiv \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$ ε_{ijk} تانسور پادمتقارن

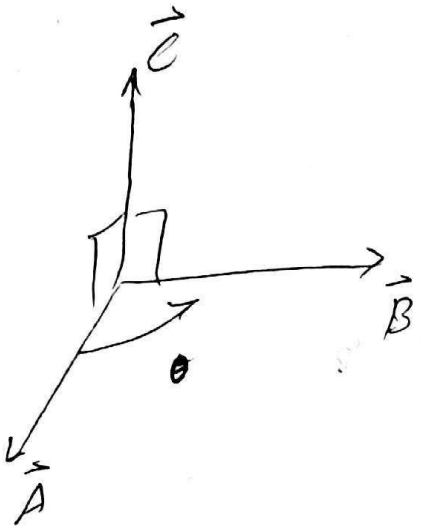
$\varepsilon_{ijk} = 0$ اگر دو اندیس برابر

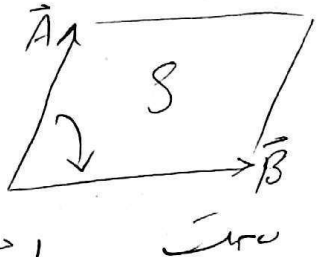




$|\vec{C}| = C = AB \sin\theta$ ← $\vec{B}, \vec{A}$ بین

$\vec{C} \perp \vec{A}, \vec{B}$





سمت

$S = |\vec{C}|$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

Scanned with CamScanner

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}$$

- $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} \quad , \quad e_i \equiv \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\,A_j\,B_k$$

$$\rightarrow \quad \vec{C} = \sum_i C_i\,\hat{e}_i = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\,e_i\,A_j\,B_k$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} \quad , \quad \vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Scanned with CamScanner