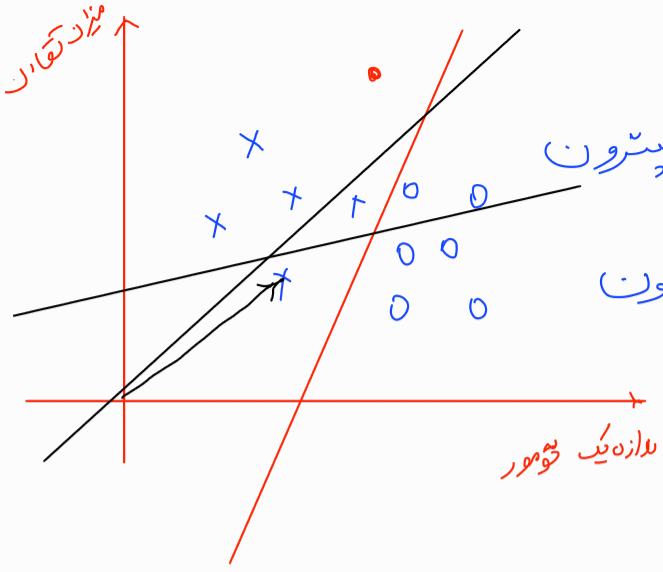
کاربردهای جبر خطی



(۱) یادگیری ماشین
- پرسپترون
- رگرسیون
- ...

(۲) کدگذاری — 1 ۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۰

(۳) رمزنگاری — Hill

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(۴) رباتیک

(۵) گیم های سه بعدی

(۶) گراف

(۷) شبکه های اجتماعی

(۸) سیستم های توصیه گر

(۹) Google ، Pagerank

(۱۰) SVD برای فشرده سازی اطلاعات

(۱۱) شبکه های عصبی

(۱۲) ....

یادآوری ماتریس‌ها

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

$1 \le i \le m$
$1 \le j \le n$

که در آن a_{ij} ها اعدادی حقیقی یا مختلط هستند.

جمع ماتریس‌ها

$$A_{m\times n} = [a_{ij}] \quad , \quad B_{m\times n} = [b_{ij}]$$

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]$$

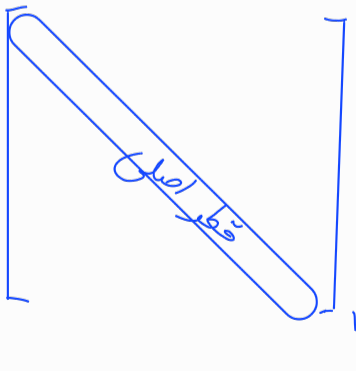
ماتریس مربعی

هرگاه $m=n$

ماتریس صفر

$\forall i,j \; ; \; a_{ij} = 0$

قطر اصلی ماتریس



a_{ii}

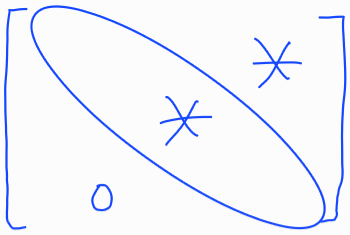
$(1 \le i \le n)$

ماتریس قطری

$\forall i,j \; ; \; \text{if } i \neq j \; ; \; a_{ij} = 0$

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی



زیرقطر اصلی صفر است.

به صورت مشابه ماتریس پایین مثلثی معرفی می‌شود.

ماتریس سطری

$$A_{1\times n} = [a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1n}]$$

ماتریس ستونی

$$A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

ترانهاده ماتریس (جای سطرها و ستون‌ها عوض می‌شوند)

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تذکر:

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

ضرب اسکالر یک عدد در یک ماتریس

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad , c \in \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

$$cA := [ca_{ij}]_{m\times n}$$

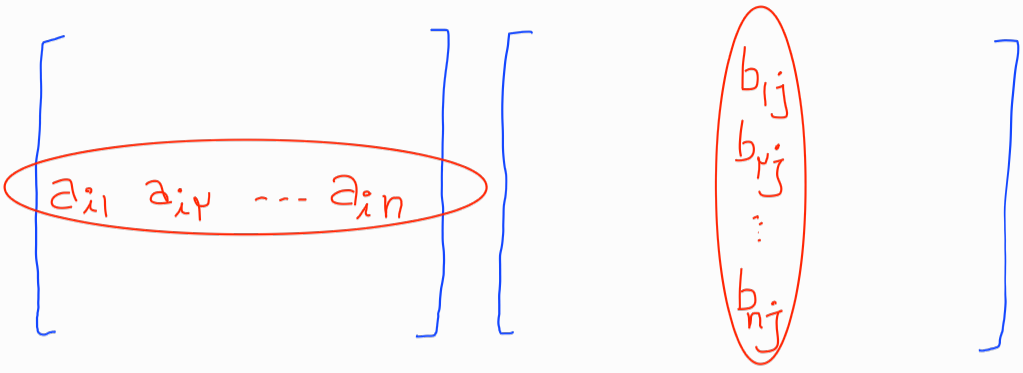
ضرب دو ماتریس:

$$A_{m\times n} \; , \; B_{n\times r}$$

در این صورت حاصلضرب A در B به صورت زیر $C_{m\times r} = AB$

تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$



ماتریس همانی I_n

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

تذکر:

$$A I = I A = A \qquad (A_{n \times n})$$

تذکر:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

ماتریس متقارن:

$$A^t = A$$

ماتریس پادمتقارن:

$$A^t = -A$$

دستگاههای معادلات خطی :

یک معادله خطی برحسب مجهولهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

که در آن a_iها و b اعدادی حقیقی یا مختلط باشند.

(توان مجهولها یک است و هیچ دو مجهولی در هم ضرب نمی‌شوند.)

یک دستگاه m معادله از n مجهول (متغیر) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

که در آن x_iها مجهول (متغیر) هستند و a_{ij}ها و b_iها اعدادی حقیقی یا مختلط اند.

اگر تمام b_iها صفر باشند دستگاه را همگن می‌نامیم.

قرارداد: از این پس $\mathbb{F}$ میدان اعداد حقیقی یا میدان اعداد مختلط است.

تعریف: ترکیب خطی سطری معادله

اگر $c_1, \dots, c_m$ عناصری از $\mathbb{F}$ باشند در این صورت

$$c_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) + c_2(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m) = 0$$

را یک ترکیب خطی از معادلات دستگاه (*) نامیده می‌شود.

نمایش ماتریسی یک دستگاه معادلات خطی

در دستگاه m معادله از n مجهول (*) فوق می‌کنیم:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{و ماتریس ضرایب} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \text{ (مجهول‌ها)}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

در این صورت دستگاه معادلات (*) را می‌توان بصورت

$$AX = B$$

(A: $m\times n$، X: $n\times 1$، B: $m\times 1$) نمایش داد.

تعریف: دو دستگاه معادلات خطی (I) و (II) را هم‌ارز گوییم هرگاه هر معادله دستگاه معادلات (II) یک ترکیب خطی از دستگاه معادلات (I) باشد و برعکس.

لم: اگر $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ یک جواب برای دستگاه معادلات خطی (I) باشد به وضوح جوابی از هر ترکیب خطی معادلات (I) هم خواهد بود.

نتیجه: مجموعهٔ جوابهای دو دستگاه معادلات خطی هم‌ارز برابرند.

تذکر ۱: لازمی نیست که تعداد معادلات خطی هم‌ارز یکسان باشند به عنوان مثال

(I)
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=9 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

(II)
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=9 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=12 \end{cases}$$

تذکر ۲: اگر دو دستگاه معادلات خطی جوابها یکسان داشته باشند لزوماً هم‌ارز نیستند.

اعمال سطری مقدماتی:

$c \in \mathbb{F}$ و $A_{m\times n}$

① $e_r(c)A =$ (ضرب کردن یک سطر ماتریس در عدد ثابت $c\neq 0$)

② $e_{rs}(A) =$ (جابجا کردن دو سطر rام و sام ماتریس A)

③ $e_{rs}(c)A =$ (بجای سطر r ام A مجموع آن سطر با c برابر سطر sام A را قرار می‌دهیم.)

لم: اعمال سطری مقدماتی در ماتریسها وارون پذیرند:

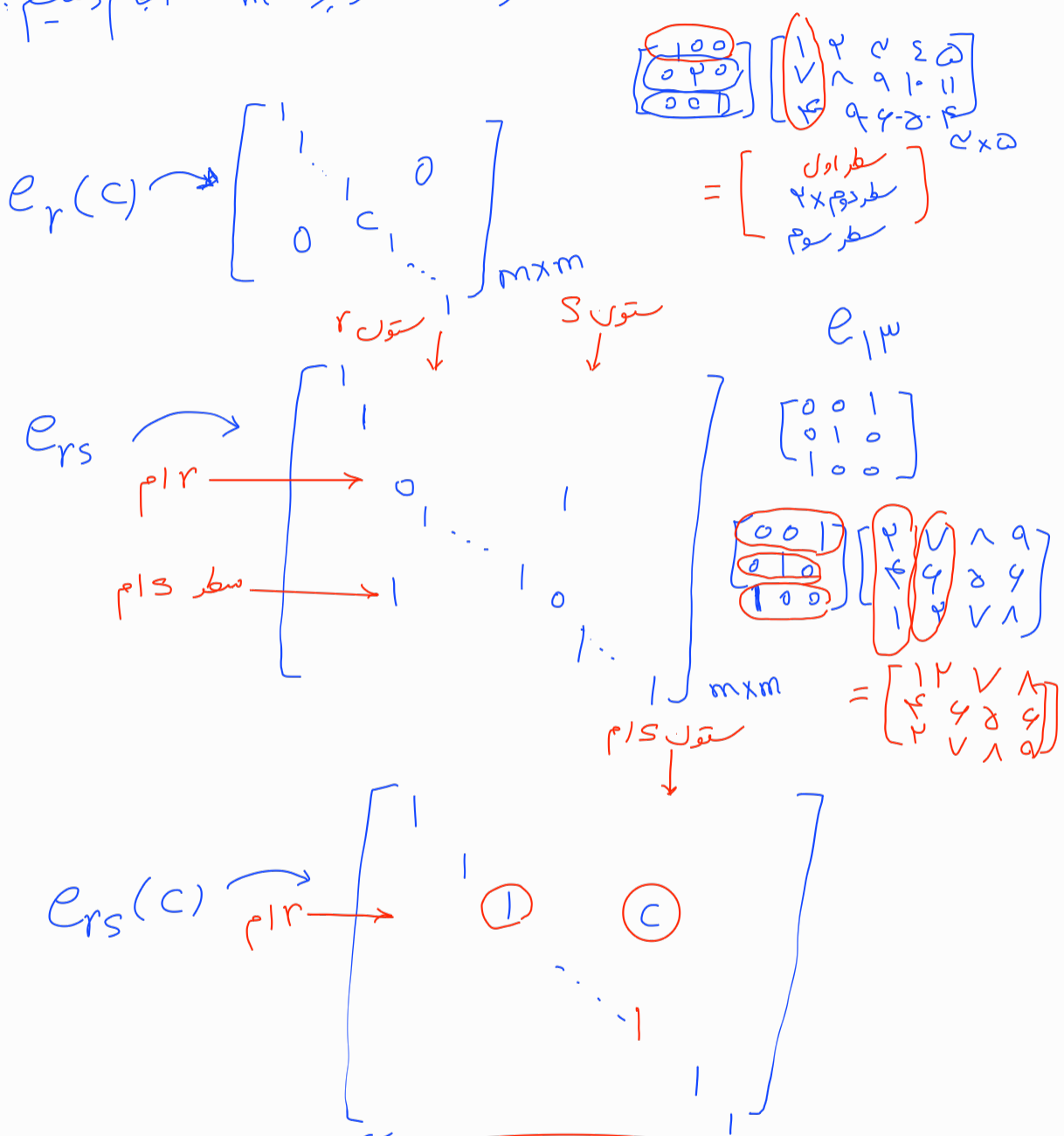
وارون $e_r(c)$ $=$ $e_r(\frac{1}{c})$

وارون $e_{rs}(c)$ $=$ $e_{rs}(-c)$

وارون e_{rs} $=$ e_{sr}

قضیه: به هریک از اعمال سطری مقدماتی می‌توان یک ماتریس متناظر داد که با ضرب کردن آن از طرف چپ در $A_{m\times n}$ همان نتیجه بدست آید.

اثبات: کافی است همان عمل سطری مقدماتی را بر I_m انجام دهیم.



به این ماتریسها ماتریسهای مقدماتی گفته می‌شود.

ماتریس های نظیر توابع وارون ؟

تعریف: دو ماتریس A و B را هم‌ارز سطری گوییم هرگاه بتوان با انجام تعدادی اعمال سطری مقدماتی بر ماتریس A ، ماتریس B بدست آید. $(A \sim B)$

تذکر: وضوح هم‌ارز سطری یک رابطه هم‌ارزی است

$$A \sim A$$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$B = P_1 P_2 \cdots P_k A \Rightarrow P_1^{-1} B = \underbrace{P_1^{-1} P_1}_{I} P_2 \cdots P_k A = P_2 \cdots P_k A$$

$$\left.\begin{matrix} A \sim B \\ B \sim C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \sim C$$

$B = P_1 P_2 \cdots P_k A$

$C = Q_1 Q_2 \cdots Q_t B = Q_1 Q_2 \cdots Q_t P_1 P_2 \cdots P_k A$ اثبات

$$B = P_1 P_2 \cdots P_k A$$

$AX=0$ جواب X

$AX=0$

$$P_k A X = P_k 0 = 0 \Rightarrow P_{k-1} P_k A X = 0 \cdots \Rightarrow P_1 P_2 \cdots P_k A X = 0 \Rightarrow BX = 0$$

تذکر: اگر A و B دو ماتریس هم‌ارز سطری باشند آنگاه جواب‌های دستگاه معادلات $AX=0$ و $BX=0$ یکسان است.

(توجه: $B = P_1 P_2 \cdots P_k A$)

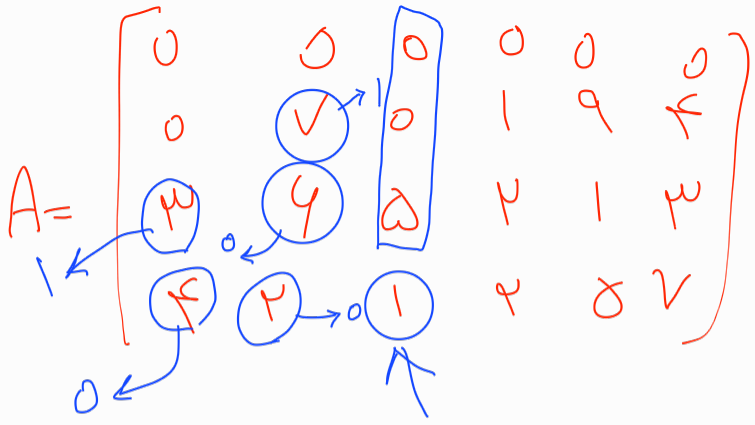
تعریف تحویل شده سطری (Raw-Reduced)

ماتریس $A_{m \times n}$ را تحویل شده سطری گوییم هرگاه

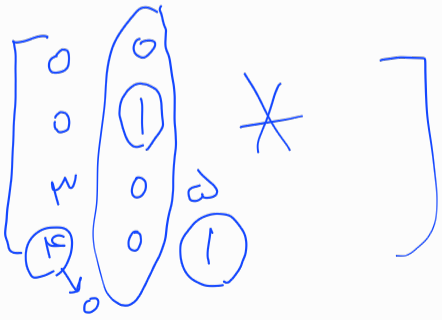
(۱) اولین درایه ناصفر در هر سطر عدد یک باشد. (یک مقدم)

(۲) تمام عناصری که در ستون عضو یک مقدم هستند صفر باشند.

مثال: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تحویل شده سطری است.



$$e_{\mu}\left(\frac{1}{\nu}\right)A$$



$$e_{\mu\nu}(-\nu)\,e_{\mu\nu}(-\nu)\,e_{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)A$$

قضیه: هر ماتریس $m \times n$ هم‌ارز سطری یک ماتریس تحویل شده سطری است.

اثبات: بررسی اولین سطر
- اگر صفر باشد به آن کاری نداریم
- اگر ناصفر باشد اولین عنصر ناصفر در سطر را a و ناصفر در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌کنیم و سپس ستون شامل این 1 را صفر می‌کنیم و ادامه بحث مشابه

تمرینات بخش (۳.۱) کتاب هافمن

مسایل شماره ۱ - ۲ - ۳ - ۵ - ۶

تعریف (تحویل شده سطری پلکانی)

ماتریس A را تحویل شده سطری پلکانی گوییم هرگاه

(۱) تحویل شده سطری باشد.

(۲) سطرهای صفر در پایین ماتریس باشند.

(۳) یکهای مقدم در سطرهای بعدی، جلوتر از یکهای مقدم سطرهای قبلی باشند.

مثال.

$$\begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



قضیه: هر ماتریس $A_{m \times n}$ با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم‌ارز است.

اثبات واضح چون هر تحویل شده سطری با جابجایی سطرها، تحویل شده سطری پلکانی می‌شود.

اهمیت طرح این دو تعریف کجاست؟!

فرض کنید که دستگاه معادلات خطی $\underset{m\times n}{A}\,X=0$ را داریم. برطبق بحث‌های قبل A هم‌ارز سطری است با R که R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است بنابر قضایای قبل جواب‌های $AX=0$ و $RX=0$ یکسانند. پس $AX=0$ را $RX=0$ بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که R به شکل زیر باشد

$$R=\begin{bmatrix} 0\ 0\ 1 & * & & & & & \\ & & 1 & & * & & \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & \\ 0\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0 & 0\ 0\ 1\ * \\ \multicolumn{7}{|c|}{\text{سطرهای صفر}} \end{bmatrix}\begin{matrix}\}\ r\\ \\ \\ \\ \}\ r\end{matrix}\quad \begin{matrix}\}\ r \text{ سطر ناصفر}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$m\times n$

تعداد متغیرهای این دستگاه معادلات = ؟

اگر یکهای مقدم در ستون‌های $k_1, k_2, \dots, k_r$ باشد در این صورت متغیرهای $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ را در نظر می‌گیریم و بقیه متغیرها را به صورت $u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_{n-r}}$ نامگذاری می‌کنیم. حالا $RX=0$ دقت کنید: با توجه به ماهیت یکهای مقدم نتیجه می‌شود که

$$x_{k_1}+\sum_{i=1}^{n-r} c_{1i}u_{t_i}=0 \qquad (c_{1i}\in\mathbb{F})$$

$$x_{k_2}+\sum_{i=1}^{n-r} c_{2i}u_{t_i}=0 \qquad (c_{2i}\in\mathbb{F})$$

$$\vdots$$

$$x_{k_r}+\sum_{i=1}^{n-r} c_{ri}u_{t_i}=0 \qquad (c_{ri}\in\mathbb{F})$$

مثال

$k_1=3$ $\quad k_2=6$

$$r=2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 9 \end{bmatrix} \right. \quad n-r \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ x_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ x_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

R

c_{14} $\quad c_{15}$ $\quad c_{17}$

$$x_3 + (4u_4 + 7u_5 + 3u_7) = 0$$

$$x_6 + 9u_7 = 0$$

c_{27}

حال اگر به $u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_{n-r}}$ مقادیر دلخواه بدهیم

$\Rightarrow$ x_{k_i}ها مشخص میشوند.

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ x_3 = -4u_4 - 7u_5 - 3u_7 \\ u_4 \\ u_5 \\ x_6 = -9u_7 \\ u_7 \end{bmatrix} \;\middle|\; u_i\text{ها دلخواه} \right\}$$

نتیجه اگر $n - r > 0$ = تعداد سطرهای ناصفر $\Rightarrow$ حتماً جواب غیربدیهی داریم.

تعداد متغیرها n — تعداد کل ستون‌ها

$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z = 10 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

نتیجه اگر در دستگاه $AX = 0$ که $A_{m \times n}$ داشتیم $m < n$ بازهم جواب غیربدیهی داریم

$m < n$ ← معنی؟

تعداد متغیرها n > m = تعداد معادلات

واضح است زیرا .....

قضیه: فرض کنید $A_{n\times n}$ ماتریسی مربعی باشد. در این صورت

$A\sim I_n \iff AX=0$ فقط جواب بدیهی دارد

اثبات: اگر $A\sim I_n$ پس جواب‌های $AX=0$ با $I_nX=0$ یکی است اما $X=I_nX=0$.

برعکس: بنا بر قضایا ماتریس A با یک ماتریس تحویل شده سطری یکتای تحویل شده R هم‌ارز است. جواب‌های $AX=0$ و $RX=0$ با هم برابرند پس $RX=0$ هم فقط جواب بدیهی دارد. اما بنا بر روند اثبات قضیه‌های قبل نباید R ای داشته باشیم (چون x_iها دلخواه بودند.) ولذا باید تعداد x_iها $=n-r=0 \Rightarrow n=r$. پس تمام سطرهای R ناصفرند $\Leftarrow R$ هم $n\times n$ است و هیچ سطر ناصفری ندارد پس در هر سطر باید یک مقدم داشته باشیم که صعودی چیده شده‌اند و بعلاوه در هر ستون سایر یک مقدم بقیه اعضا صفرند $\Leftarrow R=I_n$.

ولذا $A\sim I_n$.

تذکر

$A, B, C \in M_n(F)$

F میدان ماتریس‌های $n \times n$ روی

$AB = AC$

$\Rightarrow B = C$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 0 & 9 \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ x_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ x_6 \\ u_7 \end{bmatrix}$$

$$x_3 + 5u_4 + 4u_5 + 9u_7 = 0$$

$$x_6 + 9u_4 + 8u_5 + 9u_7 = 0$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

قضیه نشان دهید که اگر جوابهای دو دستگاه $A_{m\times n}X=0$ و $B_{m\times n}X=0$ یکی باشند آنگاه دو دستگاه هم ارزند.

[برعکس آن را هم که قبلاً داشتیم.]

فرض کنید $A\sim R$ که R تحویل شده سطری بلکانی است و به طور مشابه

$B\sim R'$ که R' = = = = =

$\Downarrow$

جوابهای دو دستگاه $RX=0$ و $R'X=0$ یکسان هستند و R و R' هردو تحویل شده سطری بلکانی هستند. اما در این صورت $R=R'$. (چرا؟!)

به وضوح تعداد سطرهای صفر در دو ماتریس R و R' برابرند.

حال اولین سطر R را نگاه می کنیم اگر 1 مقدم در ستون k ام باشد $a_{1k}=1$ در این صورت عناصر قبلی این سطر صفرند ولذا معادله حاصل به صورت زیر می شود:

$$x_k=\sum_{i=1}^{n-r} c_{1k}u_{t_k}$$

چون جوابهای $AX=0$ و $BX=0$ پس باید B هم دقیقاً یک مقدم خود را در ستون k ام داشته باشد که معادله ی x_k را ایجاد کند. بعلاوه c_{1k} ها هم باید نظیر به نظیر یکسان باشند تا جوابها یکسان باشند پس سطر اول A و سطر اول B برابرند. با استدلال مشابه بقیه سطرها برابرند.

ماتریس افزوده

برای حل ماتریس $\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{X}=\underset{m\times 1}{B}$ می‌توان ماتریسی به شکل زیر ساخت

$$[\,A \mid B\,] \xrightarrow[\text{مقدماتی}]{\text{با انجام اعمال سطری}} [\,R \mid B'\,]$$

که در آن R تحویل شده سطری بالکانی نظیر A است. حال اگر r تا سطر ناصفر داشته باشیم بخش پایینی ماتریس $m-r$ سطر صفر داریم و لذا درایه‌های B' یعنی B'_iها برای $i>r$ باید صفر باشند وگرنه قطعا دستگاه جواب ندارد.

تمرینات بخش 1.4
شماره‌های ۳ـ۴ـ۸

و

بخش 1.5
مسایل ۵ـ۷ـ۸

ضرب بلوکی ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{bmatrix}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

و

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر سطرهای ماتریس B را مثلاً به شکل زیر نامگذاری کنیم

$$B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \\ B_n \end{bmatrix}$$

در این صورت با ماهیت بلوکی B ماتریسی $n\times1$ است و اگر $A_{m\times n}$ است می‌توان AB را تشکیل داد:

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}_{n\times1} = \begin{bmatrix} a_{11}B_1+\cdots+a_{1n}B_n \\ \vdots \\ a_{m1}B_1+\cdots+a_{mn}B_n \end{bmatrix}_{m\times1}$$

نتیجه: سطرهای AB یک ترکیب خطی از سطرهای B است.

با همین فرآیند می‌توان ستون های A را به شکل زیر نامگذاری کرد:

$$A_{m\times n} = \left[\, A_1 \;\middle|\; A_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A_n \,\right]$$

و مجدداً AB را تشکیل دهیم: در شکل بلوکی

$$A_{1\times n}\, B_{n\times k} = \underset{1\times n}{\left[\, A_1 \;\middle|\; A_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A_n \,\right]} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\, b_{11}A_1 + \cdots + b_{n1}A_n \;\middle|\; b_{12}A_1 + \cdots + b_{n2}A_n \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; b_{1k}A_1 + \cdots + b_{nk}A_k \,\right]$$

ولذا ستون های AB یک ترکیب خطی از سطرهای A است

ماتریس‌های وارون پذیر (معکوس پذیر)

ماتریس $A_{n\times n}$ را وارون پذیر گوییم هرگاه ماتریسی مانند $B_{n\times n}$ یافت شود که $AB = BA = I_n$.

($A^{-1} = A$ وارون)

واضح است که اگر A_1 و A_2 وارون پذیر $\Leftarrow$ A_1A_2 وارون پذیر

$$(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$$

ضرب از راست :

ضرب از چپ :

تذکر : هر سه نوع ماتریس مقدماتی وارون پذیرند.

$(c \neq 0)$ $\quad e_2(\frac{1}{c})\, e_2(c) = e_2(c)\, e_2(\frac{1}{c}) = I_n$

$$e_{rs}\, e_{rs} = I_n$$

$$e_{rs}(c)\, e_{rs}(-c) = e_{rs}(-c)\, e_{rs}(c) = I_n$$

ماتریس همانی وارون پذیر است.

تذکر: $(A^{-1})^{-1} = A$

قضیه. $A_{n\times n}$ ماتریسی مربعی است. موارد زیر معادلند:

(۱) A وارون پذیر است

(۲) $A \sim I_n$ (هم‌ارز سطری)

(۳) A حاصلضربی از ماتریسهای مقدماتی است.

(۴) دستگاه معادلات $AX=0$ فقط جواب بدیهی دارد.

اثبات: (۱) $\Leftrightarrow$ (۲)

فرض کنیم $A \sim R$ که R تحویل شده سطری یکتای است

پس $R = E_1 E_2 \cdots E_k A$ (E_iها مقدماتی)

اگر A وارون پذیر باشد چون تمام E_iها وارون پذیرند $\Leftarrow$ R وارون پذیر

چون R تحویل شده سطری یکتای $\Rightarrow R = I_n$ (پس سطر صفر ندارد و ضمنا مربعی است)

برعکس اگر $A \sim I_n$ پس $A = E_1 E_2 \cdots E_k I_n$ (وارون پذیر)

بطور ضمنی ثابت شد (۲) $\Leftrightarrow$ (۳)

(۱) $\Leftrightarrow$ (۴)

A وارون پذیر و $AX=0 \Leftarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0 \Leftarrow X=0$

برعکس اگر $AX=0$ فقط بدیهی دارد $\Leftarrow RX=0$ فقط جواب بدیهی $\Leftarrow$

R سطر صفرندارد $\Leftarrow R = I_n \Leftarrow$ از (۲) نتیجه می‌شود A وارون‌پذیر است

تذکر

A وارون‌پذیر $\Rightarrow A \sim I_n \Rightarrow I_n = E_1 E_2 \cdots E_R A$

$\Rightarrow I_n = \underbrace{E_1 E_2 \cdots E_R}_{A^{-1}} A \Rightarrow A^{-1} = E_1 E_2 \cdots E_R$

$= E_1 E_2 \cdots E_R I_n$

معنی ؟

یک الگوریتم یافتن وارون ماتریس

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{اعمال مقدماتی}} [I_n \mid A^{-1}]$$