جلسه سوم: هنوز داره استاد حیرت دیرت درباره تاریخ اصول کوانتوم میگه! مثلاً اول نور رو فرض کردن ذره‌ای بعد شد موج با معادلات ماکسول گفتن موجه بعد با تابش جسم سیاه و فتو الکتریک متوجه شدن یه ایراداتی هست و انرژی کوانتیزه شده و اینا خلاصه نظریه نور موجی بقا داشت

اومدن نمودار آزمایش تابش جسم سیاه رو دادن فرمول دادن توجیه کنند که شد این: انرژی مود های متفاوت باید به چند تا چیز وابسته میبود تا شدت همون شکل دلخواه ما رو داشته باشه:

$E = \bar{n} h \nu$ ← یک عدد طبیعی، فرکانس، ثابت پلانک!

که این فرمول خیلی عجیب بود: یعنی میگه نور تک فرکانس رو شدت رو افزایش داد!

و اینکه انرژی نور مجموعه‌ای از بسته‌هایی با انرژی $h\nu$ است (کوانتومی شدن نور!) به این بسته‌ها میگن photon

بعدش میریم به دوست خوبمون که قبلش خیلی Gay میزدنا ← Louis de Broglie: این بنده خدا به ذهنم‌ترین شکل ممکن به این فکر کرد که اگر نور که موجه و اختر ذره‌ای کرده نکنه بقیه ذرات رفتار موجی میکنن!

آقای من فرکانس رو از این به بعد f مینامم!

$$\Rightarrow v = \lambda f \Rightarrow \{c = \lambda f\} \Rightarrow E = hf \Rightarrow \{E = \frac{hc}{\lambda}\} \Rightarrow pc = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \{p = \frac{h}{\lambda}\}$$

برای فوتون

$$\xrightarrow{\text{از نسبیت}} E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \xrightarrow[m=0]{\text{photon}} E = pc \Rightarrow \{p = \frac{E}{c}\}$$

+ فی اگر قرار باشه ذرات رفتار موجی بکنن، دوبروی به این نتیجه رسید که ممکنه این رابطه دوبرگلی درست باشه:

$$\{\lambda = \frac{h}{p}\}$$

یعنی اگر ماده بخواد به موج تبدیل بشه طول موجش اینطوری بدست میاد!

ولی چرا ندیدیم این رو تا الان! فرض کن که یک ماشین داره حرکت می‌کنه و تکونه اون میشه: $10^3 \times 10^3 = 10^6 \frac{kg\,m}{s}$

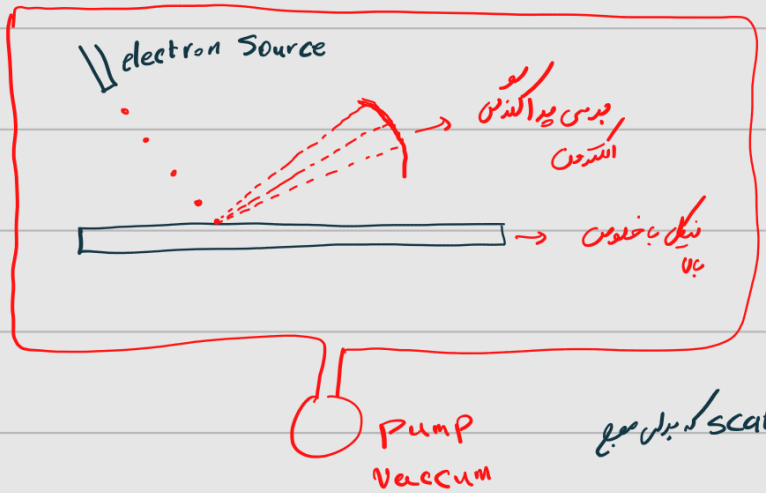
پس طول موجش میشه:

$$\lambda = \frac{10^{-34}\ J\,s}{10^6\ \frac{kg\,m}{s}} = \{10^{-40}\ m\}$$

بحث چیه؟ اینکه این موج خیلی طول کوچیکی داره که با هیچ آزمایش ابتدایی تا این زمان قابل بدست آوردن!

مثلاً ما با پراش میایم دقت موجی رو آشکار می‌کنیم! برای پراش باید یک شکاف از مرتبه اندازه طول موج داشته باشیم! ولی 10^{-10} m خیلی کوچیک بید!

بعد یک کوره متوان اومدن کلی آزمایش کردن:



بصورتی اشکال پیش اومده که باعث شده داشتن این محفظه خراب شد و هوا وقت تو و فیلم اکسید شد!

با این اشتباه یک اتفاق باحال میوفته:

یک الگوی تداخل موجی از سیستم بدست میومن بعد با رابطه scattering که برای موج نوشته بودیم ($n\lambda = 2d\sin\theta$) با استفاده از زاویه ای که داشتیم کل λ بدست میومد

این λ کاملاً با فرمول $\lambda = \frac{h}{p}$ تطابق داشت!

یعنی چیزه ذره تهی یا موج تهی نداشتیم ← امواج ماده!

چه سوال جالبی: اگر یک جسم ماکرو سکوپی داشته باشیم و بعد سرعتش رو به مقدار کم کنیم که طول موجش قابل اندازه گیری بشه! باید موج مادیش رو دید ولی ما ندیدیم چرا؟؟ البته برای جسم مثل الکترون نمیشه اینکار رو کرد! چون در آزمایشگاه برای آشکار سازی و انجام فنا یه حداقل سرعت نیاز داریم!

جلسه ۴ام:

wave - particle Duality:

بازهم فصل موضوعات تاریخی داره گفته میشه: اینکه باز تاریخ بدست آوردن ساختار موجی نور به واسطه ماکسول گفته میشه!

بعد الان دوباره اینکه پلانک پدیده ذره‌ای نور رو کشف کرد! و توجیه کرد که چون بیشتر از اندازه در طبیعت و آزمایشگاه‌ها زیاده که دیده نشده تونستن کوانتش رو بگیرن!

تعریف ذره: یه چیزی که اگر از نقطه ① رفت نقطه ② انرژیش از نقطه ① پاک بشه! اگرم اغتشاشی در حدی کوچک باشه که بشه ازش صرف نظر کرد اونوقت این ذره فقط ای است!

تعریف: آفرین آزمایشی که اینکه "ذرات در شرایط متفاوت رفتار موجی یا ذره ای از خودشون نشون میدن" رو تایید میکنه یا رد میکنه

یه تعریف خفیف از موج: جابجایی انرژی بدون جابجایی ماده! ← یعنی locality داریم (همون چیزی که برای ذره تعریف کردیم!)

الان ۲تا سوال به وجود اومده: ۱) رفتار موجی ماده چه دستاوردی داشت ۲) چطور locality رو برای ذره ها وقتی ذره ها موج دارند توجیه کرد؟

اول دوم رو جواب میدیم:

2) How to construct localization from a superposition of wave!?

Fourier expansion: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\cos(Kx) + B_n \sin(Kx)\right)$ → linear superposition

این وقتا سوپرپوزیشن های خطی از یه نظریه کلی میاد که اسمش هست (استورم-لیوویل) ← بره بخون جدید موضوعش!

شاید برات سوال باشه که این K ها چیستن! این ها یکسری خواصی هست که اگر محدوده ای که موج درش هست محدود باشه یا مرز داشته باشه این K ها نسبت به این مرزها مشخص میشن! ولی اگر محدوده نداشته باشیم و مرزها به ∞ برن اونوقت این سیگما فوریه به تبدیل انتگرال فوریه تبدیل میشه! ← چون دیدید هر K اون دلخواه یعنی هر طول موجی وجود داشه پس برای همین سیگما برداشته میشه!

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{ikx}\, dk} \qquad \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \rightarrow \text{wave number!} \qquad \boxed{\omega = 2\pi f}$$

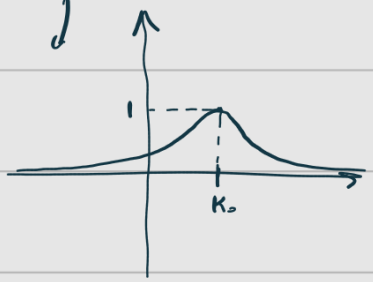
حال میخواهیم localization رو با این سه تا دید ریاضی استفاده کنیم:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)\, e^{ikx}\, dk$$

همون توابع مثلثاتی
تغییر دهنده موج
یا بعبیتی از طول موج!

اگر $g(k)$ رو با تابعی دوبرو درنظر بگیریم:

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2/2}$$



تمرین: اثبات کن با $g(k)$ تعریف شده $f(x)$ میشه:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, e^{ik_0x}\, e^{-x^2/2\alpha}$$

جواب تمرین:

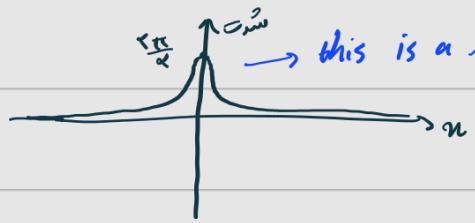
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k-k_0)^2/2}\, e^{ikx}\, dk \xrightarrow{k-k_0=y} e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{\alpha}{2})y^2 + ixy}\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, e^{ik_0x}\, e^{-x^2/2\alpha}$$

$$\text{we know} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax - bx^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-a^2/4b}$$

نکته: اگر یه موج داشته باشیم $A = A_0 \cos(kx - \omega t)$ این چیزی که حس میشه در اصل $|A|^2 = AA^*$ یا همون intensity هست!

پس باید با شدت بفهمیم که locality درست میشه یا نه!

$$f^*(x)\, f(x) = \frac{2\pi}{\alpha}\left(e^{-x^2/\alpha}\right) \rightarrow \underline{\text{intensity}}$$



→ this is a localization made by super position of waves!

بعد رسمش میکنیم:

پس یعنی با برهم زنی بی نهایت موج مایل localization از همون موج ها ساختیم! ← این تنها به این معنی هست که یعنی ما میتونیم از برهم زنی چند تا (بی نهایت) موج یک چیزی درست کنیم که خاصیت ذره ای داره! البته به شکل خاص جمعشون کردیم (اون تابعه $g(k)$ این حالت خاص رو ایجاد کرده!) ← در اصل ما اینجا چند تا توفان رو با هم جمع زدیم نه موج! ← یک چوبایی مثل موج ایستا

حال حرکت ذره چطور میشه توصیف کرد؟

اگر خواستیم $\cos(kx)$ رو تبدیل به موج رونده کنیم میشه این رو توجیه کرد! ساده بدیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

↓ Classical wave equation

$\Rightarrow$ answers: $u(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\text{toward Right}} + \underbrace{g(x+vt)}_{\text{toward left}}$

به سمت چپ! به سمت راست حرکت کرد!

$u = f(x-vt) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{df}\frac{\partial f}{\partial t} = -v\frac{du}{df} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 u}{df^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{df} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{df^2}$

حالا بذار کمی جلوتر که جواب صیده!

خب طبق گفته میخوایم که به سمت راست حرکت کنه ← پس توابعی را انتخاب میکنیم که به سمت راست حرکت کنند!

$f(x-vt) \doteq e^{i(kx-\omega t)}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, g(k)\, e^{i(kx-\omega t)}}$$

اگر خواستی بدونی چطور $g(k)$ رو پیدا کنی که این تبدیل به تابعی بشود که داره به راست حرکت کند!

جلسه ۶ام: معادله موج دوبلر: بررسی ذره آزاد:

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\phi(p)\,e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)}$$

از آزمایشاتی که تا الان انجام دادیم میدونیم که بردهم بخش امواج به صورت خطی انتشار پیدا میکنند پس از اونجایی که $\Psi(x)$ هم عملگر تابع موج است

پس فرمالیزم آن باید خطی باشد!

بیا مشتق زمانی این $\Psi(x)$ رو حساب کنیم:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\phi(p)\left(\frac{-i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\right)e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)}$$

در اصل دنبال یک معادله تحول هستیم که باید تمام مشتقات رو در برگیره - چون دنیا عالم همگنی رو داریم یعنی اگر در جهت x حرکت

کنیم تفاوت با y و z پیدا نمیکنیم! حالا سوال اینه که چه مرتبه‌ای از مشتق باید در نظر بگیریم! - چون معادلات خطی هستن

پس هر مرتبه‌ای میتونه داشته باشه

الان مسئله ما یک بعدیه! نه؟ خوب دلیلش اینه که این عبارت رو داریم در راستای خاصی حساب میکنیم که در دو جهت دیگه همگنه

در اصل یک مسئله منسوب به مرزها تعیین میشه: فرض کن سیستم ما داره در ۳ بعد حرکت میکنه ولی چون در دو جهت y و z مرزها اینقدر

از ما دورن که وقتی حرکتی در این جهت‌ها انجام میدیم دیگه حس تغییر نداریم - همگن میشه! اون وقت فقط تغییر در جهت x

$$\frac{\partial}{\partial x}\propto\frac{1}{L_x}\qquad\frac{\partial}{\partial z}\propto\frac{1}{L_z}\qquad\Rightarrow L_y,L_z\to\infty\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial}{\partial z}\to 0\\ \frac{\partial}{\partial y}\to 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial}{\partial y}\propto\frac{1}{L_y}$$

ره متوجه میشیم!

این ها همگون ابعاد مرز سیستم در مجبت دلخواه است! ← موضوع که فوتونشک به مخمش گند میکنه:

characteristic length

الان مسئله ما کمی بهتر هست اونم دقیقاً به این دلیل که خودمون با ابعاد مرزمون در آزمایشگاه پدکار کردیم که فقط بی از

این ابعاد ایجاد ناهمانی بکنه که بیشه صحبتی نسبت به اون مجبت وجود داشته باشه که به اصطلاح مسئله اش حل بشه.

حال مشتق مکانی:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p) \left(\frac{ip}{\hbar}\right) e^{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p) \left(\frac{-p^2}{\hbar^2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)}$$

بعدش با چند تا ضریب متوجه میشیم که:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

↳ free particle Schrödinger eq!

حال اگر سیستم ذره آزاد نباشه: اونوقت باید در $e^{\frac{i}{\hbar}[px - Et]}$ ضرب کنید و بشه این بابا: $E = \frac{p^2}{2m}$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) = K + V$$

چون $V(x)$ ربطی به p نداره میتونی کلاً از انتگرال خارجش کنی: ولی جایی آن بالا نمیشه چون با این فرمول بندی کلاً

پتانسیل بی اثر میشه میشه گید خانمتون بدلی ورود $V(x)$ میسازیم

به شکل عجیبی که تفهیم چرا ولی اومدیم گفتیم که چقدر بدلی ذره آزاد:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

شبیه خود معادله موجه:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi$$

همه معادل جدی گرفتیم که اینکه احتمال E مثل یک عملگر عمل کند روی ψ و عملش میشه: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

برای تکانه هم همینه: $p^2 \equiv -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \longrightarrow \boxed{p = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$

پس تابع $V(x)$ رو هم میتونیم یک عملگر در نظر بگیریم روی ψ! پس فرمالیزم میشه:

اصلا از کجا اومد این؟؟ آخه! چطور اسکالر عملگر شد!

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi}$$

- probability interpretation of wave function:



چیزی که روی پرده میبینیم شدت است

ولی شدت منبع ما من رو اینجا دارم بهش می‌گم

حالا چون اگر دقت کنی الان معلوم نیست که الکترون

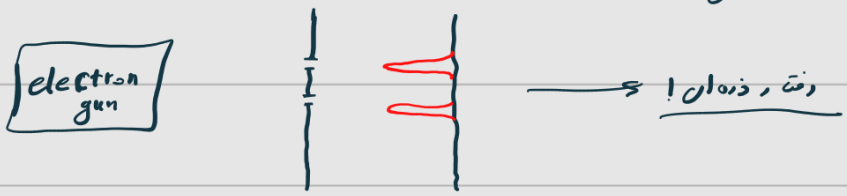
به کجای پرده خورده! برای همین از این نمودار شدت که بدست میاد روی پرده استفاده می‌کنیم و احتمال حضور الکترون

روی نقاط مختلف پرده استفاده می‌کنیم! ← یعنی صرفا به علت ناتوانی ما برای آشکارسازی حضور ماده در مقیاس خیلی کوچیک از ریاضیات احتمالی استفاده

می‌کنیم!

بعد تمام این وقتی بود که اصلا خود دوشکاف رو ببری نگاه بود! برای مطالعه اش باید به اون دوشکاف خوشگل (نود) بتابونی تا ببینه که الکترون

اون سر شکاف چی می‌کنه که این رفتار موجی رو داره ازش میده! منتهی وقتی اینکار رو می‌کنی رفتار الکترون کاملا عوض میشه:



بعد موضوعی که هست اینکه در کنار این ما الکترون ها رو تک تک شلیک نکردیم که دقیق بفهمیم که الکترون چطور از شکاف عبور می‌کنن ولی وقتی این مشکل رو حل کردن باز هم نتایج یکسان خواهد بود! یعنی اگر رفتن دینامیکی ماده رو بفهمن ماده موج میشه و اگر نفهمن دینامیکی رو چه کنیم ماده ذره‌ای رفتار می‌کرد! ← این شد اصل عدم قطعیت (لطفاً مطالعه شود!)

الان استاد ظاهراً بیان کرد که دلیل این رفتار عجیب الکترون این بود که فوتون‌هایی که برای آشکارسازی دینامیک الکترون استفاده شد وقاحت کرد و رفت آدم‌ها دینامیک و بنابراین ماهیت رفتار الکترون رو عوض کرده که البته چطور؟ نمی‌دانیم!

بعد کردیم به مکانیک موجی برای الکترون: چیزی که روی پرده است اینه: $|\psi_1 + \psi_2|^2$

بعد وجود منبع نور برای آشکارسازی الکترون، یک فاز به معادله یکی از شکاف‌ها مثلاً ψ_2 میده! ←

$\psi_1' = \psi_1 e^{i\phi}$ → random (چون منبع نور ماهروس نیست)

$$|\psi_1' + \psi_2|^2 = (\psi_1' + \psi_2)(\psi_1' + \psi_2)^* = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2Re\left[(\psi_1 \psi_2^*) e^{i\phi}\right]$$

اون چیزی که روی پرده میبینیم میانگین این شدت هست (چرا؟؟)

کادر پاسخ:

خب چون میانگین بود:

$$\langle |\psi_1' + \psi_2|^2 \rangle = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2Re\left[\psi_1 \psi_2^* \langle e^{i\phi} \rangle\right]$$

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}}{2\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2\pi} = 0$$

← این دلیل که چرا باید ها 2π باشه هست رو هم نفهمیدم!

در نتیجه این عامل تداخل که همون ترم اضافه تد به $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ وجود داشت، بود؛ حذف میشه و سیستم ذره‌ای رفتاری کلاسیک از خود نشون میده که نفهمیدم!

در مکانیک موجی کلا اصل داشتیم مبنی بر تشخیص فرکانس موج از طریق قیاس آن با اموالی که فرکانس‌ش رو میشناسیم، به طوری که داریم:

$$\Delta t \gtrsim \frac{1}{\Delta f} \Rightarrow \boxed{\Delta t \Delta f \gtrsim 1}$$

در اصل این موضوع بیان می‌کنه که اگر اختلاف فرکانس دامنه‌ای ۲ موج قیاس شده از مدت زمان قیاس دو موج خیلی کمتر باشد آنگاه این ۲ موج را برابر می‌گیریم در صورتی که اصلاً در این مورد قطعیت نداریم!

برای موج مادی داریم: $E = hf$, $\lambda = \frac{h}{p}$ ← عدم قطعیت‌ها در مکانیک

$$\begin{cases} \Delta E \, \Delta t \gtrsim \hbar \\ \Delta x \, \Delta p \gtrsim \hbar \end{cases}$$

ولی به پیر، به پیغمبر این اثبات اصل عدم قطعیت نیست اصلاً از لحاظ ریاضی جور در نمیاد!

خوب معادله شرودینگر رو بدست آوردیم: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V(x)\psi$ ← جالبی کار اینکه اصلاً ریاضیات عجیبی

نیست و بعضا چیزهایی هست که در مکانیک کلاسیک هم استفاده شده است!

روابط عدم قطعیت رو هم گفتیم:

$$\begin{cases} \Delta x \, \Delta p \gtrsim \hbar \\ \Delta E \, \Delta t \gtrsim \hbar \end{cases}$$

$|\psi|^2$ رو همون هم هست که $|\psi|^2$ رو صرفا میدونیم و بحثی راجع بهش نکردیم

probabality distrobution function

حالا می‌خواهیم $|\psi|^2$ رو از روی معادله شرودینگر بدست بیاریم!

اول کل معادله رو در ψ^* ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \psi^* V(x)\psi$$

یادآوری: $\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}$

حیتی‌فی ψ^* رو هم از معادله شرودینگر بدست بیاریم:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + V(x)\psi^*$$

← حاصل مزدوج مختلط شده خود معادله شرودینگر بدست آمده! ($i \to -i$)

بعد ψ رو دوستی ضرب می‌کنیم و هردو معادله بدست آمده رو با هم جمع می‌کنیم و مشتقات رو کامل می‌کنیم:

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\psi^*\psi}_{P}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right]$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}P = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]$$

حالا می‌خوایم از شباهت این معادله با معادله پیوستگی در الکترومغناطیس استفاده کنیم و تفسیری در معادله بدیم:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

بعد معادله دوبه $\hbar$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]$$

← این دو معادل هم آن در الکترومغناطیس می‌گیریم!

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \end{cases}$$

← اصلاً فی دونم چیه! فقط استاد نوشته گفت!

دست یکی و دیگه درست تر: پس معادله شرودینگر صورت اختصاری

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}J = 0$$

که بطوری که $J = \frac{\hbar}{2im}\left\{\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right\}$

از نظر کلاسیک احتمال صحیح این است که اگر بخواهیم مختصات x را روی محور بیابیم به طوری که احتمال متناظر با این x، P_x باشد

اینطوری به دست می‌دیم: به شرطی که x گسسته باشد $\rightarrow \langle x \rangle = \sum_x P_x \, x$

بعد مکانیک کوانتوم اینطوری استفاده می‌کنیم: $\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \psi^* f(x) \psi$

اگر انتظار داشتیم که اینطوری میشود: $dx \, \psi^* \psi \, f(x)$ غلط! چرا؟ با آزمایش دیدن که ترتیب ضرب‌شان مهم و بامعنی است!

اینطوری که نوشته شد!

بعد براساس این چیزی که بهش اومد بازبان دیگری معادل شد: این اصل: اگر بخواهد یک تابع موج کوانتومی باشد

باید square integrable باشد! یعنی: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \psi \psi^*$ $\rightarrow$ معنای این اینه: از $-\infty$ تا $+\infty$ حتماً ذره رو یکجایی پیدا می‌کنیم!

بدیهی

این بازبان دیگر معادل جایگذاری "normalized" بودن است که قبل بهش گیر کرده بودیم!

خوب ما تا کمیت فیزیکی خیلی هم داریم که می‌خواهیم:

$x \rightarrow$ position

$p \rightarrow$ momentum

تمام کمیت‌هایی که در فیزیک دیدیم همه عضو متغیرهای هستند! ولی جایگاه این کمیت جزو اصل عدم قطعیت کجاست؟!

قبلاً داشتیم: $p = m \frac{dx}{dt}$ بعد تعریف می‌کنیم: $\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle$ کاملاً تخمی تخمی این تقسیم گرفته شد!

حاصل این به این صورت میشه: $\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* x \psi = m \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} x \psi + \psi x \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}$

سوالی که برای من پیش اومد اینه که چرا $\frac{d}{dt}$ تبدیل به $\frac{\partial}{\partial t}$ شد، به مفهوم پیشرفتی نبود و اشتباه استفاده شد!

از معادله شرودینگر:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi \right\}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{1}{-i\hbar} \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* + V \psi^* \right]$$

بعد از این جایگذاری می‌کنیم:

$$\langle p \rangle = \frac{m}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \psi^* x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} x \psi \right\}$$

$$\star: \quad \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} x \psi = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} x \psi \right] - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi - x \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} (\psi \psi^*) + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[x \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

از این که نوشته استفاده می‌کنیم بعد داریم: $\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* p^2 \psi$ آن طبق تعریف $\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \psi$

از مقایسه این ۲ حالت داریم: $\left(p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)$ دقت کردی؟ ما تقریبا خودمون بهش رسیدیم $\left(\langle p^2 \rangle = m \frac{d}{dt} \langle px \rangle \right)$

که برگردیم به این حالت که میدونیم و اثبات کردیم (بعضی منطق نظریه درسته و با خودش تناقض نداره البته تا این)!

Quantum Recipe:

۱) $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi$; $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p) e^{ipx/\hbar}$

۲) $\lambda = \frac{h}{p}$; $f = \frac{E}{h}$

۳) $p(x,t) = |\psi(x,t)|^2$

۴) $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar$, $\sigma_E \sigma_t \geq \hbar$

۵) $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* f \psi$ $\xrightarrow{\text{Result}}$ $p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$

۶) $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi\, dx = 1$, ۷) $\{x, p\} = i\hbar$

در ادامه داریم: آنتگرال آخر رو با $\phi(p)$ یعنی در momentum expresion چی میشه؟!!!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(p)\, \phi(p)\, dp = ? \Rightarrow$$ نظریه اشتروم لیوویل : $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i(p-p')x/\hbar} = 2\pi\hbar\, \delta(p-p')$

این رو می‌نویسیم خودت بفهم یعنی چی!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ip'x/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(p-p')x/\hbar}\, dx}_{2\pi\hbar\, \delta(p-p')}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} = \sqrt{2\pi\hbar}\, \phi(p)}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^* \phi \, dp = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi^* \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x) e^{-ipx/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi^* e^{-ipx/\hbar}}_{\sqrt{2\pi\hbar}\,\psi^*}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\, \psi^*(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(p)\, \phi(p)\, dp = 1$$

→ این صورت به این علت است که تابع موج در فضای تکانه (فضای هیلبرت) تشکیل شده!

از قبل میدونستیم:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p)\, e^{ipx/\hbar}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p)\, p\, e^{ipx/\hbar} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p)\, p \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\, e^{ipx/\hbar}}_{\phi^*}$$

عکس تبدیل فوریه:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p)\, p\, \phi^*(p)$$

→ چون فقط وابستگی p داره میشه جای متغیرها رو عوض کرد!

$$\Rightarrow \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi^*(p)\, p\, \phi(p)$$

$$\Rightarrow |\phi(p,t)|^2 = P(p,t)$$

تست: چیز مبهم زیر رو ثابت کنید!

Configuration ← space → momentum	
x	p
$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$	$x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$

برای جلو: $x p \psi = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t)$ و $p x \psi(x,0) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x \psi(x,t))$

$$= \frac{\hbar}{i} \psi(x,t) + \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$\Rightarrow xp\,\psi(x,t) - px\,\psi(x,t) = (xp-px)\,\psi(x,t) = \{x,p\}\,\psi(x,t) = \frac{-\hbar}{i}\,\psi(x,t)$$

$$\{x,p\} = i\hbar$$

جبر لی

این جبر عملگرهای x و p هست (اگر نظریه گروه رو بدونی اینا خیلی مفهوم داره!)

جابجاگر!

ولی به زبان ساده میگیم که ترتیب اندازه گیری p و x تفاوت داره و همه که از چه طرف میدیم اندازه میگیریم!

● Eigen value and Eigen function and expansion Postulate:

$$1D.\quad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\,\psi \quad ; \quad \psi = \psi(x,t)$$

$V(x,t)$ or $V(x)$

Stationary

Quantum mechanics

پتانسیل مستقل از زمان

فیزیک آشنا و غیرواقعی است!

فعلا: $V(x)$ در نظر میگیریم نه $V(x,t)$! پس حالت Stationary و آشنا!

نکته فعلا این که اگر V وابستگی زمانی نداشته باشه اونوقت سامانه کوانتومی خودش میتونه خودش رو تفکیک پذیر کنه!

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t)$$

← پس داریم: روشی که از جداسازی متغیر استفاده کنیم!

$$\psi(x,t) = U(x)\,T(t) \Rightarrow i\hbar\frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2 T}{2m}\frac{d^2U}{dx^2} + V(x)\,UT$$

$$i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2} + V(x)$$

پس از تقسیم به UT داریم:

$$i\hbar \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \underbrace{E}_{\text{ثابت}} \quad , \quad \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2} + V(x) = \underbrace{E}_{\text{ثابت}}$$

که بعضی

$$T(t) = \underbrace{C}_{\text{ثابت}} e^{-iEt/\hbar}$$

پس معادله تفاضلی مشروح دیگر میشه این:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U}{dx^2} + V(x)U = EU$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2U}{dx^2} + (V-E)U = 0$$

time-independent schrödinger eq!

self-adjoint هرمیتین هست در فضای حقیقی!

دوباره نظریه اشتورم لیوویل و عملگرهای self-adjoint تحقیق به عمل آید!

آگر کسی حوصله کند و معادله ویژه مقدار رو بنویسد می فهمی که معادله مستقل زمان مشروح دیگر معادله ویژه مقداره!

$$\mathcal{F}(u) = \lambda u$$

عملگر $\mathcal{F}$ روی u — مقدار ویژه — معادله ویژه مقدار

فقط بحث اینه که عملگر $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ عملگر ماهست self-adjoint انتخاب شده اند!

بریم سراغ حل کردن این معادله مستقل زمان!

یه درجه آزادی جالب در محاسبات مون اینه: با تغییر V به $V+V_0$ و $E \to E+E_0$ معادله بی تغییر باقی می مونه!

آگر که معادلات زمانیش رو همیشه بکنیم چون نتیجه به $\psi^*\psi$ ربط داره تغییرش بی اهمیت می شه:

$$\psi\psi^* = uu^* T T^* = uu^* \underbrace{e^{-i(E_1+E_2)t/\hbar}\, e^{i(E_1+E_2)t/\hbar}}_{1} = uu^*$$

نکته مهمی اینکه معادله شرودینگر یک معادله دیفرانسیل خطی است! پس هیچ سازگاری با نظریه اشتوم لیوویل صدق می‌کند!

در مسائل کوانتم یک قیدی مطرح است: در مسائل مقادیر ویژه اینطوری می‌نویسیم:

$$f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$$

چیز توابع ویژه باید دوره‌ای باشند! ظاهراً اگر نباشه اونوقت هرچیز امکان پذیر میشه و سیستم غیر قابل حل میشه!

۲ تا مثال حل شده ـ ۱) $\frac{df}{dx} = \lambda f(x)$ ۲) چاه پتانسیل بی نهایت یک بعدی!